УДК 519.176

А. А. Балагура

Алгоритм кодирования корневых помеченных деревьев неубывающими кортежами

Корневое дерево можно определить рекурсивно [1]. Корневое дерево *d* есть такое множество вершин, что: одна специально выбранная вершина называется корнем дерева *d*, оставшиеся вершины (исключая корень) разбиты на $m \geq 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом. Вершины, не имеющие приемников, называются концевыми вершинами. Вершины, имеющие приемников, называют внутренними вершинами.

Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами 1, 2, ..., *n*. Повторяем следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными [6]. Пометим числом *n*+1 вершину v такую, что а) вершина *v* не помечена, а все ее приемники помечены и б) среди всех непомеченных вершин, все приемники которых помечены, v является вершиной, имеющей приемника с наименьшей меткой. Полученное дерево называется помеченным.

Пусть $n \geq 2, 2 \leq k \leq n$. Обозначим *D*(*n*) - множество помеченных корневых деревьев, имеющих в точности *n* концевых вершин, у которых из каждой внутренней вершины (и корня) исходит не менее двух вершин; *D*(*n*, *k*) - множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности *n* концевых вершин и *k* приемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

Существует естественное соответствие между полными разбиениями и деревьями [4].

Четвертая задача Шредера (произвольные расстановки скобок в *n*-множестве) и ее обобщение, сформулированные в терминах деревьев, - подсчет мощности множеств *D*(*n*) и*D*(*n*, *k*) соответственно.В [2] предложен комбинаторный подход к решению четвертой задачи Шредера (произвольные расстановки скобок в множестве) и ее обобщения.

Рассмотрим структуры родственные деревьям, в которых важен порядок внутренних вершин в дереве. Чтобы его зафиксировать договоримся о способе обхода дерева: будем обходить дерево от корня слева, вверх, направо, вниз обратно к корню. Назовем типом дерева $d \in D(n;k)$ последовательность $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$ степеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева способом описанном выше.

Обозначим

$D(n, k, r_1, r_2, ..., r_{n-k})$ - множество деревьев $d \in D(n;k)$ типа $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$,

$D(n,k,r) = \bigcup_{(r_1, r_2, ..., r_{n-k})} D(n,k,r_1,r_2,...,r_{n-k})$,где объединение ведется по всем таким наборам $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$, которые являются композициями $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, при чем если среди слагаемых есть единицы, они учитываются в конце в сумме и не влияют на порядок других слагаемых.

Кортежем длины n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $(i_1, ..., i_n)$.

Пусть $a_1, ..., a_n \in N$, $a_1 \leq ... \leq a_n$. Обозначим

$I(a_1, ..., a_n) = \{(i_1, ..., i_n) |\} \in N, i_j \leq a_j, i_j \leq i_{j+1}, 1 \leq j \leq n.$

Промежуточной задачей для подсчета мощности множества $D(n,k,r)$ является задача кодирования изучаемого множества деревьев. Описанный ниже алгоритм позволяет закодировать множество $D(n,k,r)$ неубывающими кортежамииз множества

$I(a_1, a_2, ..., a_{n-k-m})$, где m - число слагаемых r_i, $(1 \le i \le n-k)$ равных единице в наборе $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$.

Обозначим A_i - множество меток которыми могут быть закодирована i-я вершина при обходе дерева, т.е. $a_i \in A_i, 1 \le i \le n-k-m$.

Алгоритм

Вход:*n*, *k*.

Выход:все наборы $(n_1, n_2, ..., n_{n-k})$ являющиеся композициями $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, множества $A_1, A_2, ..., A_{n-k}$.

Для *i* от 1 до (*n*-*k*-1)

$$^{(i)}n_1^{(0)} = ... = {}^{(i)}n_{n-k-i-1}^{(0)} = 2,\ {}^{(i)}n_{n-k-i}^{(0)} = i+2,\ {}^{(i)}n_{n-k-i+1}^{(0)} = ... = {}^{(i)}n_{n-k}^{(0)} = 1$$

Для *i* от 0 до (*n*-*k*-1)

$$^{(i)}A_1^{(0)} = \{1, 2, ..., k\},\ {}^{(i)}A_2^{(0)} = \{1, 2, ..., k, k+1\},\ {}^{(i)}A_{n-k-i}^{(0)} = \{1, 2, ..., n-i-1\}$$

Пока $n_1 \ne i+2$ выполняем

Для *j* от 0 до (*n*-*k*-*i*)

$$^{(i)}n_1^{(j)} := {}^{(i)}n_1^{(j-1)},\ {}^{(i)}n_{n-k-i-j-1}^{(j)} := {}^{(i)}n_{n-k-i-j-1}^{(j-1)},$$

$$^{(i)}n_{n-k-i-j}^{(j)} := {}^{(i)}n_{n-k-i-j}^{(j-1)} + 1,\ {}^{(i)}n_{n-k-i-j+1}^{(j)} := {}^{(i)}n_{n-k-i-j+1}^{(j-1)} - 1$$

$$^{(i)}n_{n-k-i-j+2}^{(j)} := ... := {}^{(i)}n_{n-k}^{(j)} := 1$$

Для *m* от 1 до (*n*-*k*-*i*) и $m \ne n-k-i-j+1$

$$^{(i)}A_m^{(j)} = {}^{(i)}A_m^{(j-1)},\ {}^{(i)}A_{n-k-i-j+1}^{(j)} = {}^{(i)}A_{n-k-i-j+1}^{(j-1)} \bigcup \{\left|{}^{(i)}A_{n-k-i-j+1}^{(j-1)} + 1\right|\}$$

Список литературы

1.Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. - Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. - 294 с.

2. Балагура А.А. Перечислительные свойства комбинаторных полиномов разбиений / Балагура А.А., Кузьмин О.В.// Дискретн. анализ и исслед. опер., 18:1 (2011), 3–14.

3. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения.- М.: Наука, 1979.-152 с.

4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, поизводящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. - М.: Мир, 2005. - 767 с.