УДК 519.21

Н. А. Колокольникова

Средняя длительность случайного блуждания по одномерной решетке

Рассматривается случайное блуждание частицы по целочисленным точкам прямой, соответствующее процессу рождения и гибели. Блуждающая частица в начальный момент времени t=0 находится в точке x=m>0. Через единичные промежутки времени возможны ее перемещения (шаги) на единицу вправо или на единицу влево, или же частица остается на месте. Из точки x=mвозможно перемещение за один шаг в точку x=m-1 или x=m.

Пусть ξ_n– положение частицы при t=n. В соответствии с описанным выше, $P\{\xi_0=m\}$=1.Считаем, что вероятности перемещения зависят от координаты точки, в которой в данный момент находится частица. Тогда для любого n>1

$$P\{\xi_n=i|\ \xi_{n-1}=i\text{-}1\}=p_{i-1,i};\ P\{\xi_n=i|\ \xi_{n-1}=i\}=p_{i,i};$$

$$P\{\xi_n=i|\ \xi_{n-1}=i+1\}=p_{i+1,i}.$$

При этом

$$p_{i,i-1}+p_{i,i}+p_{i,i+1}=1,\ i=\overline{1,m-1}.$$

$$p_{m,m-1}+p_{m,m}=1.$$

Предположим, что в точке x=0находится поглощающий экран. ОбозначимT_m время первого достижения точки x=0.Тогда МT_m – число шагов (длительность блуждания) до поглощения, где М – оператор математического ожидания. Требуется найти явное выражение для МT_m.

Введем в рассмотрение вспомогательные случайные величины. Пусть τ_k – время первого достижения точки k-1 из точки k.Очевидно, что

$$P\{\tau_m=n\}=p_{m,m}^{n-1}p_{m,m-1},\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Величинаτ_k(k=$\overline{1,m-1}$)распределена так же, как величина

$$\chi_{k,k-1}+\chi_{k,k}(1+\tau_k)+\chi_{k,k+1}(1+\tau_k+\tau_{k+1}),$$

где $\chi_{m,j}$ – индикатор перехода цепи Маркова ξ_n из состояния m в состояние j. ТогдаP_k – производящая функция величиныτ_k– имеет вид

$$P_k(x)=\text{М}x^{\tau_k}=$$

$$=p_{k,k-1}x+p_{k,k}xP_k(x)+p_{k,k+1}xP_k(x)\ P_{k+1}(x).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}P_k(x)=p_{k,k-1}+p_{k,k}\left(P_k(x)+x\frac{d}{dx}P_k(x)\right)+$$

$+p_{k,k+1}(P_k(x)\,P_{k+1}(x)+\,xP_k(x)\frac{d}{dx}P_{k+1}(x)\,+xP_{k+1}(x)\frac{d}{dx}P_k(x)).$

Тогда, учитывая, что $P_k(1)$=1, а $\mathrm{M}\tau_k=\frac{d}{dx}P_k(1)$, имеем

$\mathrm{M}\tau_k$=$p_{i,i-1}$+$p_{i,i}$(1+$\mathrm{M}\tau_k$)+$p_{i,i+1}$(1+$\mathrm{M}\tau_k$+$\mathrm{M}\tau_{k+1}$),

т.е. рекуррентная формула для $\mathrm{M}\tau_k$ может быть записана в виде

$$\mathrm{M}\tau_k=\frac{1}{p_{k,k-1}}+\frac{p_{k,k+1}}{p_{k,k-1}}\mathrm{M}\tau_{k+1}\ ,\ k=\overline{1,m-1}. \qquad (1)$$

Применив соотношение (1) m раз и учитывая, что $\mathrm{M}\tau_m=\frac{1}{p_{m,m-1}}$, получим

$$\mathrm{M}\tau_k=\frac{1}{p_{k.k-1}}+\sum_{j=k+1}^{m}\frac{1}{p_{j,j-1}}\prod_{i=k}^{m-1}\frac{p_{i,i-1}}{p_{i,i+1}},\ k=\overline{1,m-1}. \qquad (2)$$

Поскольку $T_m=\sum_{k=1}^{m}\tau_k$, то, на основании формулы (2), искомая средняя длительность случайного блуждания запишется:

$$\mathrm{M}T_m=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{p_{k.k-1}}+\sum_{j=k+1}^{m}\frac{1}{p_{j,j-1}}\prod_{i=k}^{m-1}\frac{p_{i,i+1}}{p_{i,i-1}}\right). \qquad (3)$$

Теорема об асимптотической нормальности

Для выяснения асимптотического поведения величины T_m при $m\to\infty$найдем дисперсию и третий абсолютный момент этой величины. Используя вторую производную функции$P_k(x)$при x=1, получим

$$B^2(m)=DT_m=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}((\mathrm{M}\tau_k)^2-\mathrm{M}\tau_k+2\sum_{j=k+1}^{m}(\mathrm{M}\tau_j)^2\prod_{i=k}^{m-1}\frac{p_{i,i+1}}{p_{i,i-1}}).$$

Для третьего абсолютного момента величины τ_k справедливо неравенство

$$\mathrm{M}|\tau_k-\mathrm{M}\tau_k|^3<6\left(M\tau_kD\tau_k+\sum_{j=k+1}^{m}M\tau_jD\tau_j\prod_{i=k}^{m-1}\frac{p_{i,i+1}}{p_{i,i-1}}\right).$$

Обозначим

$$\delta_i=\frac{p_{i,i+1}}{p_{i,i-1}},i=\overline{1,m-1}.$$

Пусть

$$\delta_m^*=\max_{1\le i\le m-1}\delta_i<1.$$

Доказана интегральная теорема:

Теорема.Если при m$\to\infty$ выполняется условие

$$(1-\delta_m^*)\min_{1\le j\le m-1}\frac{1}{\mathrm{M}\tau_j}B(m)\to\infty,$$

то равномерно по $x\in(-\infty,\infty)$

$$P\{\frac{T_m-MT_m}{B(m)}<x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Частные случаи

Предположим, что вероятности перехода постоянны:

$p_{i,i+1}=r$, $p_{i,i}=q$,$p_{i,i-1}=p$, $r+q+p=1$, $i=\overline{1,m-1}$;

$p_{m,m-1}=p$,$p_{m,m}=1-p_{m,m-1}=q$.

Тогда

$$\delta_i=\frac{p_{i,i+1}}{p_{i,i-.1}}=\delta$$

при всехi.

1). Пустьδ =0.Тогда

$$MT_m=\frac{m}{p}.\qquad(4)$$

2). Если δ =1, то

$$MT_m=\frac{m(m+1)}{2p}.\qquad(5)$$

3). При$\delta\neq 0$, $\delta\neq 1$равенство (3) примет вид

$$MT_m=\frac{m}{p}+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m-1}i\delta^{i-1}=$$

$$=\frac{m}{p}+\frac{1}{p}\frac{(m-1)\delta^m-m\delta^{m-1}+1}{(\delta-1)^2}.\qquad(6)$$

Проиллюстрируем полученные результаты.

Пример. Пусть $m=5$, $p=\frac{1}{4}$,δ=0.Тогдаформула (4) даст результат

$$MT_5=20,$$

т. е.при отсутствии шагов вправо из точки x=5 в среднем за 20 шагов частица достигнет поглощающего экрана. Если $p = r = \frac{1}{4}$, то, на основании формулы (5),

$$MT_5 = 60.$$

А если предположить, что

$$m = 5,\ p = \frac{1}{4}, \delta = 2,$$

то, используя равенство (6), получим

$$MT_5 = 216.$$

В случае же $m = 5,\ p = \frac{1}{4}, \delta = 3$ имеем

$$MT_5 = 588.$$

Использованные источники

1. Колокольникова Н. А. Центральные предельные теоремы для процессов рождения и гибели с дискретным временем / Н. А. Колокольникова // Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. – Иркутск, 1997. – С.75-89.