УДК 372.851

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ЕГЭ: ВНЕШНИЕ КВАДРАТЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОКРУЖНОСТИ

Н.А. Казаков

ГОУ ВО МО «Московский государственный областной университет», г. Москва

Т.И. Кузнецова

Институт русского языка и культуры
ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», г. Москва

Аннотация. Одной из важнейших образовательных целей современной школы является подготовка учащихся к успешной сдаче выпускных экзаменов. В структуру выпускного экзамена ЕГЭ по математике профильного уровня входит геометрическая задача на доказательство повышенной сложности, требующая от обучающихся всестороннего знания планиметрии. Важнейшей особенностью является отсутствие единых алгоритмов решения таких задач, успех во многом зависит от накопленного учащимися опыта решения комбинированных планиметрических задач. Тем не менее, практика решения позволила выделить некоторые геометрические структуры, являющиеся вспомогательными ключами к поиску правильного решения. В данной статье мы рассмотрим примеры решения задач на «внешние квадраты» и «вспомогательные окружности».

Ключевые слова: планиметрическая задача; дополнительное построение; внешние квадраты; метод выражения углов; метод вспомогательной окружности; интерактивная геометрическая среда GeoGebra.

Контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) фиксируют тревожность в плане решения планиметрических задач повышенной сложности, предъявляемых в ЕГЭ под номером 16 [7]. Поскольку эти задачи являются комбинированными и не имеют единого алгоритма решения, не являются типовыми [1], постольку успех их решения зависит не только от мотивации выпускника к успешной сдаче выпускных экзаменов, но и от таких нетривиальных качеств учащегося, как широта охвата геометрического содержания и понимание внутрипредметных планиметрических связей [5], что и определяет актуальность настоящего исследования.

Исследование литературы по решению планиметрических задач позволило разделить их на два класса по следующим признакам: по внешнему виду (содержанию) и по способу решения. В первом случае задачи могут иметь схожее условие, но при этом отличаться по приёмам решения. Во втором случае – наоборот: задачи имеют различные формулировки, но при их решении используется один и тот же общий приём.

В данной статье мы рассмотрим:

- задачи на «внешние квадраты» как задачи общего внешнего вида;

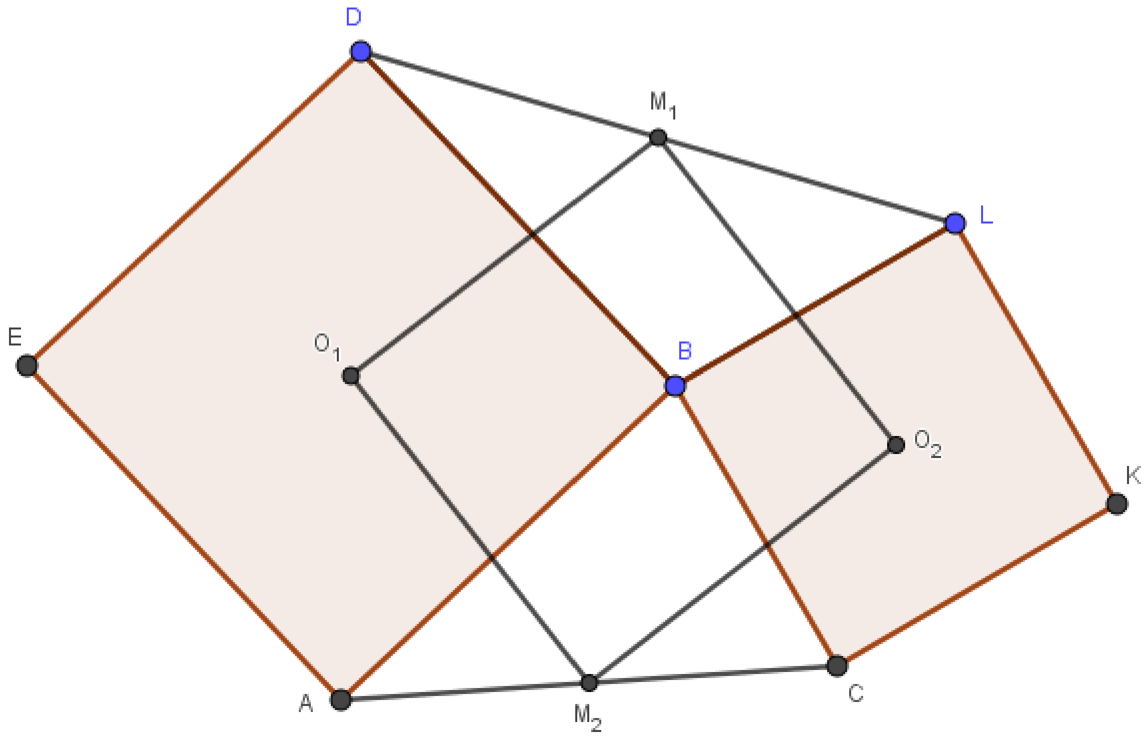
- задачи на «вспомогательную окружность» как задачи общего приёма решения.

Под задачами на «внешние квадраты» мы будем понимать такие, в которых речь идёт о квадратах, построенных внешним образом на сторонах данного треугольника. Самым знакомым случаем является геометрическая интерпретация теоремы Пифагора, однако существует большое множество других задач на внешние квадраты, некоторые из которых мы рассмотрим в настоящей работе.

Под задачами на «вспомогательную окружность» будем понимать такие, в которых ключевым методом является построение окружности. Данное построение реализуется в ряде случаев: концы отрезка видны из двух точек, не лежащих на данном отрезке, под одним и тем же углом; прямоугольные треугольники имеют общую гипотенузу; сумма противоположных углов четырёхугольника равна $180°$; три различные точки равноудалены от третьей.

Рассмотрим примеры решения задач [2; 6; 7]. При решении часто используются распространённые методы в различных формах: дополнительные построения, выражение углов, применение теорем

Задача 1 (2012 г.). На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $BCKL$ с центрами O_1 и O_2. M_1 и M_2 — середины отрезков DL и AC (см. модель 1). Докажите, что $O_1M_1O_2M_2 -$ квадрат.



Модель 1. Чертёж к условию задачи № 1

Доказательство.

1) Рассмотрим четырёхугольник $ADLC$. Поскольку O_1 и O_2, M_1 и $M_2 -$ середины сторон, то $O_1M_1O_2M_2$ – параллелограмм (вспомогательная задача, которая легко доказывается с использованием свойств средней линии – решите самостоятельно);

2) $\Delta ABC = \Delta KCD$ (по двум сторонам и углу между ними – проверьте самостоятельно), следовательно, $AL = CD$.

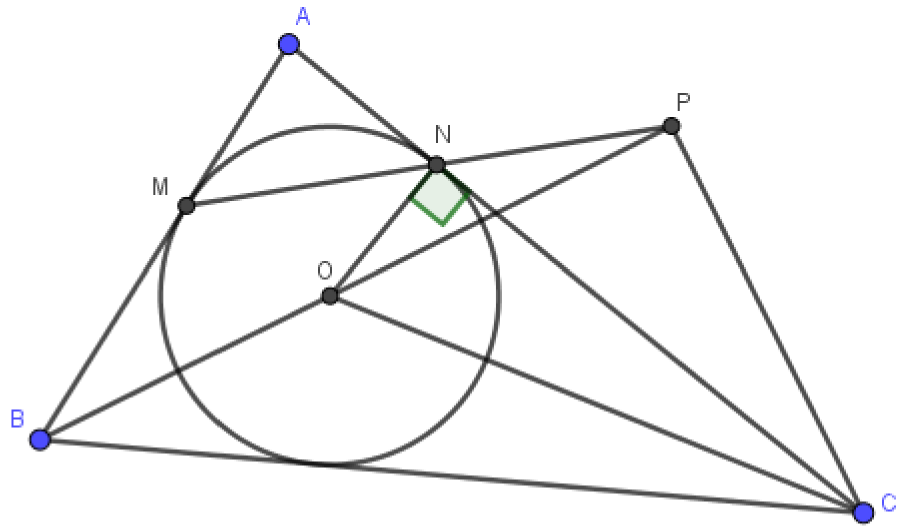
3) Заметим также, что равные треугольники $\Delta ABC,\ \Delta KCD$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки B на 90°. Значит, также $AL \perp CD$.

4) Рассмотрим треугольники $\Delta DAC,\ \Delta DLC$. По свойству средней линии треугольника: $O_1M_2 || CD;\ O_1M_2 = \frac{1}{2}CD$: $O_1M_2 || CD;\ O_1M_2 = \frac{1}{2}CD$.

5) Аналогично: $O_1M_1 || AL;\ O_1M_1 = \frac{1}{2}AL$: $O_2M_2 || AL;\ O_2M_2 = \frac{1}{2}AL$.

6) Из пп. 1–4 получаем: $O_1M_1 = O_1M_2$, $O_1M_1 \perp O_1M_2$. Значит, $O_1M_1O_2M_2$ – квадрат, что и требовалось доказать.

Задача 2 (2019 г.). Окружность с центром с точке O, вписанная в треугольник ABC касается его боковых сторон AB и AC в точках M и N соответственно (см. модель 2). Прямая BO пересекает прямую MN в точке P. Докажите, что прямые PC и BP – перпендикулярны.



Модель 2. Чертёж к условию задачи № 2

Доказательство.

1) Обозначим углы: $\angle BAC = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle ACB = \gamma$.

2) ΔMAN –равнобедренный, поскольку $AM = AN$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности.

3) Вычислим внешний угол $\angle BMP$ треугольника ΔMAN:

$$\angle BMP = \alpha + \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2};\ \angle MBP = \frac{\beta}{2}.$$

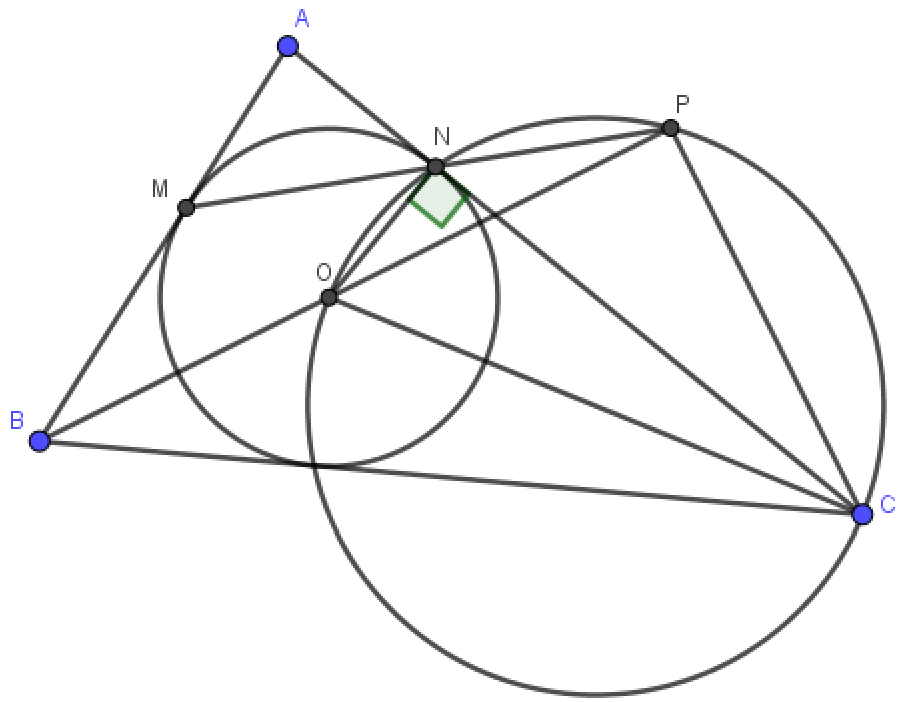
4) Рассмотрим ΔMPB. В нём:

$$\angle MPB = 180° - \frac{\beta}{2} - \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

5) Имеем: $\angle MPB = \angle NPO = \angle NCO = \frac{\gamma}{2}$. Значит, концы отрезка NO видны из точек P, C под одним и тем же углом $\frac{\gamma}{2}$. Таким образом, точки N, P, C, O лежат на одной окружности (см. модель 3).

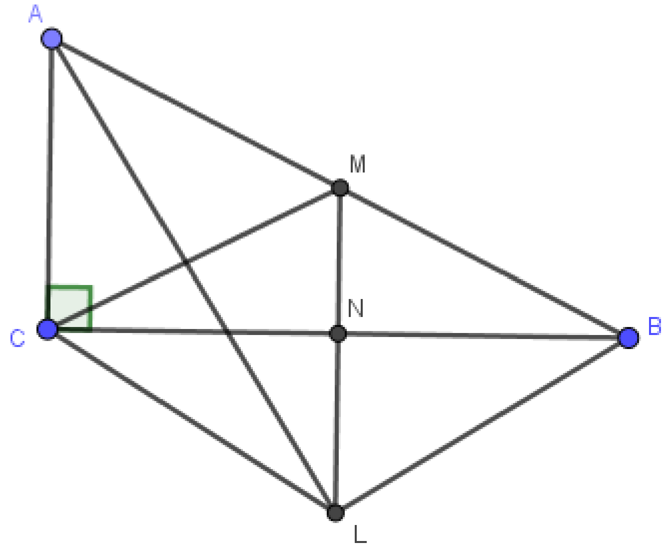
6) Заметим, что вписанный угол $\angle ONC = 90°$. Значит, $OC -$ диаметр.

7) $\angle OPC = \angle ONC = 90°$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{OC}$. Таким образом, $BP \perp PC$, что и требовалось доказать.



Модель 3. Чертёж к решению задачи № 2

Задача 3 (2019 г.). В прямоугольном треугольнике *ABC* точки *M* и *N* – середины гипотенузы *AB* и катета *CB* соответственно (см. модель 4). Биссектриса угла *BAC* пересекает прямую *MN* в точке *L*. Докажите, что треугольники *AML* и *BLC* подобны.



Модель 4. Чертёж к условию задачи № 3

Доказательство.

1) $AM = CM = BM$ по свойству медианы CM прямоугольного треугольника ΔABC.

2) MN − средняя линия ΔABC, значит, $MN \mid\mid AC$; следовательно, $\angle CAL = \angle MLA$ как накрест лежащие при параллельных MN, AC и секущей AL.

3) AL −биссектриса угла $\angle CAM$, значит, $\angle MAL = \angle CAL$. Из п. 2 следует, что $\angle MAL = \angle MLA$, значит,

по соответствующему признаку ΔAML −равнобедренный, т. е. $AM = ML$.

4) Из пп. 1 и 3 имеем: $AM = CM = BM = ML$, значит, можно провести окружность через точки A, C, L, B (см. модель 5). Поскольку $\angle ACB = 90°$, то центр окружности – середина гипотенузы AB.

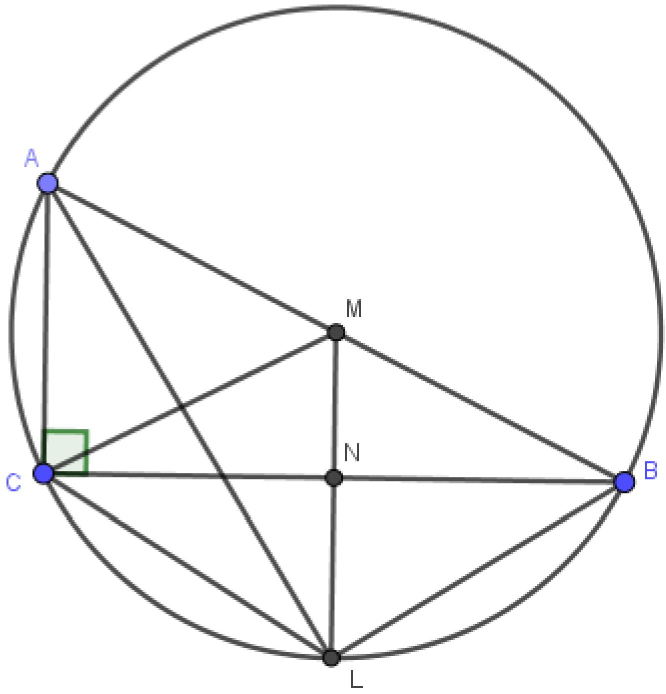
5) ΔBLC − равнобедренный по медиане и высоте, поскольку N − середина BC и $MN \perp CB$. Тогда $\angle CBL = \angle LCB$.

6) $\angle LAC = \angle LBC$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\smile}{CL}$, $\angle BAL = \angle CAL$ (AL − биссектриса), следовательно, $\angle LBC = \angle BAL$.

7) $\angle LAB = \angle LCB$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\smile}{LB}$. Также $\angle LAB = \angle CAL$ и, следовательно, $\angle CAL = \angle LCB$.

8) Из пп. 2 и 7 следует равенство: $\angle MLA = \angle LCB$.

9) Рассмотрим треугольники ΔAML и ΔBLC: $\angle MLA = \angle LCB, \angle LBC = \angle LAB$. Значит, треугольники подобны по двум углам, что и требовалось доказать.



Модель 5. Чертёж к решению задачи № 3

Заметим, что в настоящей статье чертежи выполнены с помощью ИГС GeoGebra, что повышает качество чертежа и, глобально, отвечает общей тенденции информатизации образовательного процесса [3; 4]. Кроме того, в аналогичных ситуациях мы рекомендуем использовать и другие интерактивные геометрические среды, такие, как «Живая геометрия», «1С: Математический конструктор», которые, как и GeoGebra, обладают рядом преимуществ по сравнению с обычным, ручным, способом построения чертежей.

Заключение. В структуру выпускного ЕГЭ по математике профильного уровня входит геометрическая задача на доказательство повышенной сложности. Решение таких задач требует от обучающихся всестороннего знания планиметрии. успех во многом зависит от накопления учащимися опыта решения комбинированных планиметрических задач. Важнейшей особенностью настоящего положения дел в преподавании геометрии является отсутствие единых алгоритмов решения таких задач. Настоящее исследование способствует восполнению этого недостатка, тем самым способствуя достижению одной из важнейших образовательных целей современной школы — действенной подготовки учащихся к успешной сдаче выпускных экзаменов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений / Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.

2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2018. – 256 с.

3. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. Из истории терминов "модель" и "моделирование". Часть 3. Чертежи — модели задач / Проблемы учебного процесса в инновационных школах: сб. науч. тр. / Под ред. О.В. Кузьмина. – Иркутск: Издательство ИГУ. – Вып. 21. – 2018. – С. 54–58.

4. Казаков Н.А., Солдатенков Р.М. Использование интерактивных геометрических сред при обучении математике / Актуальные проблемы математики, физики и математического образования [Электронный ресурс] : сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии / под ред. Г.В. Кондратьевой, Е.А. Бедриковой, Д.А. Графова – Электрон. текстовые дан. (7,50 Мб). – М. : ИИУ МГОУ, 2018, С 73-76.

5. *Кузнецова Т.И.* Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. – М.: КомКнига, 2005. – 480 с. – (Серия «Психология, педагогика, технология обучения»); 2-е изд. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

6. Официальный сайт Федерального института педагогических измерений. [Электронный ресурс]. URL: http://www.fipi.ru (дата обращения: 9.11.2018)

7. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2019 году единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень / ФИПИ. – 2019, 10 с.

PLANIMETRIC TASKS ON THE PROOF IN THE USE: EXTERNAL SQUARES AND AUXILIARY CIRCLES

N. Kazakov, T. Kuznetsova

Annotftion. One of the most important educational purposes of modern school is training of pupils for a successful passing the final exams. The structure of final examination of the Unified State Examination in mathematics of profile level includes the geometrical task on the proof of the increased complexity demanding from students of comprehensive knowledge of planimetry. The major feature is the lack of uniform algorithms of the solution of such tasks, success in many respects depends on the experience of the solution of the combined planimetric tasks accumulated by pupils. Nevertheless, practice of the decision allowed to mark out some geometrical structures which are auxiliary keys to search of the correct decision. In this article we will review examples of the solution of tasks on "external squares" and "auxiliary circles".

Keywords: planimetric task; additional construction; external squares; method of expression of corners; method of an auxiliary circle; interactive geometrical GeoGebra environment.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Казаков Никита Александрович – педагог дополнительного образования физико-математической школы №2007, магистр 1 курса МГОУ факультета психологии, кафедра начального образования;

e-mail: alphan95@mail.ru

Кузнецова Татьяна Ивановна – доктор педагогических наук, профессор кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин Института русского языка и культуры МГУ имени М.В. Ломоносова, академик Международной академии наук педагогического образования;

e-mail: kuzti45@gmail.com