О бесконечномерных вероятностных распределениях

Т. А. Ширяева[1], А.К.Шлепкин[2]

[1,2]Красноярский государственный аграрный университет
Российская федерация, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 90
*ak_kgau@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются бесконечномерные распределения как логическое обобщение одномерных случайных величин.

Ключевые слова: вероятностное пространство, измеримое отображение, банахово пространство.

1. Введение

Общеизвестно, что когда в 1900г. на Втором Международном математическом конгрессе Давид Гильберт поставил задачу единого формализованного подхода к построению оснований математики, то это дало мощный толчек развитию математики. И хотя Гильберт надеялся, что формально-логический метод позволит построить основания математики, его надежды не оправдались из-за теорем Геделя о неполноте и дальнейших проблемах. Несмотря на это, в теории вероятностей создание системы аксиом позволило четко определить, что теория вероятностей является полноправной математической дисциплиной.

В 1933г. А.Н. Колмогоров на немецком языке издал «Основные понятия теории вероятностей», где предложил систему аксиом, которая оказалась настолько удачной, что ею пользуются до сих пор и вряд ли придумают что-либо лучшее. Если посмотреть издание 1936г. на русском языке «Основных понятий теории вероятностей» [1], то практически весь изложенный там материал сейчас можно найти в учебниках по теории вероятностей для студентов вузов. То, что являлось научным открытием, со временем становится знанием для широких масс специалистов какой-либо области. Естественно происходит некоторое запаздывание во времени.

Принятая система аксиом позволила дать строгое определение случайной величины, как измеримого отображения вероятностного пространства в множество действительных чисел с заданной на нем алгеброй борелевских множеств. Сначала все классические результаты были связаны с одномерной случайной величиной, причем исследования велись в то время, когда еще не были сформулированы аксиомы теории вероятностей, и, конечно, продолжались и после. Более того, нерешенных задач по-прежнему хватает. Например, знаменитая проблема Кантелли: если X и Y – случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0,1)$, $f(x)$ – измеримая неотрицательная функция, случайная величина $X+f(x)Y$ имеет нормальное распределение, то следует ли тогда, что $f(x)$ - почти всюду постояна? Также стали рассматривать и многомерные случайные величины. Это потребовало существенных технических усилий, но с идеологической точки зрения не представляло особых трудностей.

Логично, что следующим шагом должно было явиться рассмотрение случайных величин в более общих пространствах. Это стало возможным благодаря работе Колмогорова А.Н. «Основные понятия теории вероятностей», которую многие математики считают эпохальной (см. [2], стр. 11). Уже в этой работе А.Н. Колмогорова 1933г. в главе 3 есть 4-ый параграф «Вероятности в бесконечномерных пространствах».

Естественным образом сложилось два направления.

Первое направление было связано с тем, что в пространстве, в которое отображается вероятностное пространство, определены алгебраические отношения. В частности, это пространство может быть группой, полугруппой, кольцом и т.д. Тогда значениями случайных величин являются элементы определенной группы или какой-либо другой алгебраической структуры. Вместо операции сложения случайных величин в классическом случае (конечномерном) рассматривается алгебраическая операция данного пространства, например, для группы это будет бинарная операция, которая в ней определена. Для знакомства и изучения этого направления теории вероятностей можно рекомендовать упомянутую уже монографию Гренандера [2] , а также фундаментальный труд Х. Хейера в 700 страниц «Вероятностные меры на локально компактных группах» [5]. В этих книгах находится большое количество ссылок, которые при желании можно использовать. Конечно, чтобы заниматься исследования в этой области необходимо первоначально знание алгебры.

Во втором направлении рассматриваются вероятностные распределения в линейных нормированных и топологических пространствах (например, гильбертовых, банаховых). Здесь операция сложения случайных величин не требует определения, т.к. эта операция присутствует естественным образом в линейных пространствах.

С 60-х годов 20-го века начались интенсивные исследования вероятностных распределений в бесконечномерных пространствах. По сравнению с конечномерным случаем здесь возникли не только трудности технического характера, но и идеологического. Никакого «механического» переноса результатов классической теории вероятностей здесь невозможно по той простой причине, что бесконечномерное пространство по своей структуре существенно отличается от конечномерного. Назовем, наверное, многим известных российских математиков, которые работали и продолжают работать и этом направлении: Ю.В. Прохоров, А.А. Боровков, А.Н. Ширяев, В.В. Юринский, С.В. Нагаев и многие другие. Конечно, много нерешенных проблем остается и в настоящее время, например, в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме, да и сами предельные теоремы.

Полученные результаты из статейного варианта в дальнейшем переходят в монографии. Можно назвать несколько наиболее известных монографий: У. Гренандер «Вероятности на алгебраических структурах» [2], И.И. Гихман, А.В. Скороход «Теория случайных процессов» [3], Х. Го «Гауссовские меры в банаховых пространствах» [4], Н.Н. Вахания, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобанян «Вероятностные распределения в банаховых пространствах» [6], разумеется, этот перечень далеко не полный.

Несколько более подробно остановимся на втором направлении.

Традиционно бесконечномерные случайные величины в основных курсах по теории вероятностей не рассматриваются, за исключением учебника А.Н. Ширяева «Вероятность» [8]. Это связано и со сложностью материала, и с ограниченностью часов учебного процесса. Однако представляется возможным, или даже необходимым, хотя бы одну лекцию посвящать бесконечномерным вероятностным распределениям, чтобы студенты были ознакомлены с некоторыми современными направлениями и тенденциями развития теории вероятностей. Единственное условие, которое здесь требуется: должен быть сначала прочитан предварительно курс функционального анализа, хотя бы его первая часть до линейных операторов. Но как правило чтение курса функционального анализа осуществляется параллельно чтению курса по теории вероятностей. Поэтому лекция по бесконечномерным вероятностным распределениям вполне может завершать курс теории вероятностей. Для подготовки к такой лекции можно использовать, например, «Дополнительные главы теории вероятностей» В.М. Круглова первые две главы на уровне понятий, определений и основных теорем (формулировок) [7].

Попытаемся тезисно изложить возможный вариант лекции, посвященной беглому ознакомлению с вероятностными распределениями в банаховых пространствах.

В классической теории вероятностей изучение случайных величин осуществляется по схеме: случайная величина, функция распределения, моменты случайной величины, виды распределений, виды сходимостей и как (если можно так выразиться) кульминация – предельные теоремы и закон больших чисел, которые служат прочным фундаментом для математической статистики. Этой схеме следует и изучение бесконечномерных случайных величин.

2. Возможный план лекции

Пусть $(\Omega, A, P)-$ некоторое вероятностное пространство, $B-$ вещественное банахово пространство, $\beta-$ некоторая $\sigma-$ алгебра подмножеств пространства B.

Определение. *Измеримое отображение $\xi\,:\,\Omega\to B-$ называется банаховозначной случайной величиной (случайным элементом в (B,β),*
случайным вектором в (B,β)).

Определение. *Вероятностным распределением банаховозначной случайной величины ξ (обозначают $L(\xi)(A)$) называют меру на (B,β)) определенную формулой*

$$L(\xi)(A)=P(\omega\in\Omega\colon\xi(\omega)\in A)$$

для любого $A\in\beta.\ \omega\in\Omega\ \omega\in\Omega$

В частности, закон распределения случайной величины ξ можно задать следующим образом :

$$L(\xi)(f_r)=P(\omega\in\Omega\colon f(\xi(\omega))<r),$$

где $f(x)-$ некоторый функционал на $B, r\in R_1$. Другими словами, с помощью функционала $f(x)$ задается область K (открытое и связное множество) в B и исследуется вероятность попадания случайной величины $\xi(\omega)$ в K. Если $f(x)=|x|_B-$ норма в банаховом пространстве B, то

$$L(\xi)(f_r)=P(\omega\in\Omega\colon|\xi(\omega)|_B<r).$$

Очевидно, что $L(\xi)(f_r)$ является аналогом функции распределения, т.к. $L(\xi)(f_r)$ есть одномерная случайная величина. В банаховых пространствах можно выделить класс распределений аналогичных нормальным одномерным распределениям. Пусть B^*-

сопряженное с B пространство, т.е. множество всех непрерывных линейных функционалов, определенных на B. Тогда

Нормальное распределение можно определить следующим образом:

Определение. *Банаховозначную случайную величину η будем называть нормально распределенной (гауссовской), если для любого функционала f из пространства B^*, сопряженного с B, вещественная случайная величина $f(\eta)$ имеет нормальное распределение.*

Числовые характеристики вещественных случайных величин, такие, как математическое ожидание, дисперсия и моменты более высоких порядков, играют важную роль. Поэтому естественно определить аналоги этих понятий для банаховозначных случайных величин.

Определение. *Пусть $\xi : \Omega \to \beta -$ измеримое отображение такое, что для всех $f \in B^*$*

$$\int_{\Omega} \left|f\big(\xi(\omega)\big)\right| P(d\omega) < \infty$$

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется элемент $E\xi \in B$, удовлетворяющий условию

$$f(E\xi) = \int_{\Omega} \left|f\big(\xi(\omega)\big)\right| P(d\omega) < \infty$$

для любого $f \in B^*$.

Принято этот элемент $E\xi$ называть математическим ожиданием в смысле Гельфанда–Петтиса. Известны условия, обеспечивающие существование математического ожидания в смысле Гельфанда-Петтиса.

Теорема. *Если случайная величина $\xi \in B$ удовлетворяет условию $E|\xi|_B < \infty$, то математическое ожидание $E\xi$ существует и*

$$|E\xi|_B \le E|\xi|_B.$$

Существует еще одно определение математического ожидания – это математическое ожидание в смысле Бохнера (которое здесь не дано). Используются оба определения. Отметим только, что из существования $E\xi$ в смысле Бохнера следует существование $E\xi$ в смысле Гельфанда-Петтиса и они совпадают. Обратное неверно. Свойства математического ожидания банаховозначной случайной величины во многом аналогичны свойствам математического ожидания вещественной случайной величины. Здесь мы приведем только одно свойство.

Теорема. *Если существует $E\xi$, то для любого непрерывного функционала f существует $Ef(\xi)$ и справедливо равенство*

$$Ef(\xi) = f(E\xi).$$

Обобщением ковариационной матрицы многомерных случайных векторов является понятие ковариационного оператора случайной величины $\xi \in B$. Пусть $\xi \in B$ имеет среднее $E\xi$ такое, что для всех $f \in B^*$

$$Ef^2(\xi - E\xi) < \infty.$$

Определение. *Ковариацией случайной величины $\xi \in B$ называется билинейная форма в пространстве B^* вида*

$$cov\xi(f, g) = E((\xi - E\xi)g(\xi - E\xi))$$

Для любых $f, g \in B^*$.

С ограниченной билинейной формой можно сопоставить представляющий эту форму ограниченный линейный оператор $T : B^* \to B^{**}$, определяемый формулой

$$(Tf)(g) = cov\xi(f, g),$$

где B^{**} есть пространство, сопряженное с B^* . Этот оператор T называется ковариационным оператором случайной величины ξ.

Введем понятие сходимости распределений в банаховом пространстве.

Определение. *Пусть $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots -$ последовательность вероятностных распределений на банаховом пространстве B. Тогда говорят, что эта последовательность слабо сходится к вероятностному распределению L, если для любого непрерывного ограниченного функционала $f(x)$*:

$$lim_{n\to\infty} \int_B f(x)L_n(dx) = \int_B f(x)L(dx)$$

Известно, что для конечномерных случайных величин поточечная сходимость эквивалентна слабой сходимости. Однако в случае общих банаховых пространств слабая сходимость шире, чем поточечная сходимость.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots -$ последовательность независимых одинаково распределенных банаховозначных случайных величин. $E\xi_i = 0, i = 1, \dots, n. T -$ ковариационный оператор ξ_i. Пусть

$$S_n = n^{\frac{-1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad L_n = L(S_n), \qquad N = L(\eta),$$

где $\eta -$ нормальная величина из B и $E\eta = 0,\ T -$ ковариационный оператор η.

Центральная предельная теорема в банаховых пространствах тесно связана с геометрией этого пространства, что подтверждается следующей теоремой :

Теорема. *Последовательность вероятностных распределений* $L_n = L(S_n)$ *слабо сходится к распределению* $N = L(\eta)$, *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется компакт* $C \subset B$ *такой, что*

$$sup_n\, P(S_n \notin C) \leq \varepsilon.$$

Гильбертовы пространства являются частным случаем банаховых пространств. Но в гильбертовых пространствах есть скалярное произведение, поэтому они близки по своим свойствам к конечномерным пространствам. Как следствие для них центральная предельная теорема имеет уже более простой вид:

Теорема. *Если* $E|\xi|_B^2 < \infty$, *то последовательность распределений* L_n *слабо сходится к распределению* N.

За пределами лекции остались такие разделы как: характеристические функции, закон больших чисел, неравенство Берри-Эссеена и многое другое.

Для студентов-математиков, специализирующихся на кафедрах теории вероятностей, одним из предлагаемых спецкурсов может быть спецкурс по бесконечномерным вероятностным распределениям. Конечно, это потребует от преподавателя достаточно высокой квалификации и больших временных затрат для подготовки к занятиям.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-ое издание, М., Наука, 1974.
2. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М., Мир, 1965.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М., Наука, т.1, 1971.
4. Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М., Мир, 1979.
5. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах. М.. Мир, 1981.
6. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М., Наука, 1985.
7. Круглов В.М. Дополнительные главы теории вероятностей. М., Высшая школа, 1984.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. М., изд-во МЦНМО, 2007.

Ширяева Тамара Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент; Красноярский государственный аграрный университет, tas_sfu@mail.ru.
Шлепкин Анатолий Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, Красноярский государственный аграрный университет, ak_kgau@mail.ru.