СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ

Гозбенко Валерий Ерофеевич
д.т.н., профессор, Иркутский государственный университет путей сообщения. Кафедра «Математика»

В задачах динамики механических систем есть несколько проблем.

Одна – составление дифференциальных уравнений. Эта проблема решается несколькими методами аналитической механики, например, с помощью уравнений Лагранжа второго рода, уравнениями Гамильтона, общими теоремами теоретической механики и др.

Вторая – используя полученные дифференциальные уравнения получить общее решение.

Наиболее общим и простым методом составления дифференциальных уравнений является использование уравнений Лагранжа второго рода. При этом необходимо только вычислить кинетическую и потенциальную энергию.

Для механических систем с числом степеней две и более возникает проблема – дифференциальные уравнения системы связаны, поэтому интегрирование практически не возможно. Подходы к решению подобных систем существуют.

Один из подходов – сведение системы уравнений к одному, что осуществить достаточно просто. При этом возникает задача нахождения корней характеристического уравнения, используя которые легко выписать общее решение. В этом случае возникает затруднение другого порядка – по теореме Абеля решение алгебраического уравнения степени выше четвертого порядка аналитически в общем виде практически невозможно.

В связи с этим делаются попытки постулировать решение системы без проведения к одному дифференциальному уравнению. В этом случае при значительных определенных затратах усилий, времени и определенных предположениях удается получить общее решение системы дифференциальных уравнений. При постулировании общего решения часто теряются решения, хотя какое-то решение будет найдено.

Решения системы возможно найти и с помощью операционного исчисления, который является одним из методов математического анализа. Этот подход позволяет сводить исследования дифференциальных уравнений к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Ниже рассмотрим пример, иллюстрирующий решение задачи в общем виде и с помощью операционного исчисления.

Пусть на точку массой m, которая может перемещаться в плоскости $x0y$, действуют две силы: одна притягивает точку к оси x, и величина её пропорциональна расстоянию до оси y, вторая притягивает точку к оси y, и она пропорциональна расстоянию до оси x. Используя уравнения Лагранжа, второго рода получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + l_1 y = 0, \\ m\ddot{y} + l_2 x = 0. \end{cases} \quad (1).$$

Обозначим $k_1^2 = \frac{l_1}{m}$, $k_2^2 = \frac{l_2}{m}$ и перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k_1^2 y = 0, \\ \ddot{y} + k_2^2 x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что начальные условия при $t = 0$ имеют вид (начальные скорости приняты равными нулю для простоты решения):

$$x_0 = a;\ y_0 = b;\ \dot{x}_0 = 0;\ \dot{y}_0 = 0.$$

1. Система уравнений (2) связана. Сведём (2) к одному уравнению относительно y. Из второго уравнения системы (2) имеем:

$$x = -\frac{1}{k_2^2}\ddot{y}, \quad (3)$$

откуда $\ddot{x} = -\frac{1}{k_2^2}y^{IV}$. Тогда

$$-\frac{1}{k_2^2}y^{IV} + k_1^2 y = 0.$$

$$y^{IV} - k_1^2 k_2^2 y = 0. \quad (4)$$

Можно иначе. Положим $y = -\frac{1}{k_2^2}\ddot{x}$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{k_2^2}x^{IV}. \quad (5)$$

Подставив во второе уравнение системы (2), получим:

$$-\frac{1}{k_2^2}x^{IV} + k_1^2 = 0.$$

$$x^{IV} - k_1^2 k_2^2 = 0. \quad (6)$$

Приведённые уравнения к одной переменной (4) и (6) имеют одинаковую форму и, следовательно, решение можно найти либо из уравнения (4), либо из уравнения (6).

Решение уравнения (6) найдём обычным способом.

$$x = e^{\lambda t},\ x^{IV} = \lambda^4 e^{\lambda t}.$$

Характеристическое уравнение примет вид: $\lambda^4 e^{\lambda t} - k_1^2 k_2^2 e^{\lambda t} = 0$, или

$$\lambda^4 - k_1^2 k_2^2 = 0.$$

$$\lambda^4 = k_1^2 k_2^2. \quad (7)$$

Решая систему (7), находим:

$\lambda_1 = \sqrt{k_1 k_2}$;

$\lambda_2 = -\sqrt{k_1 k_2}$;

$\lambda_3 = i\sqrt{k_1 k_2}$;

$\lambda_4 = -i\sqrt{k_1 k_2}$;

Решение запишем в общем виде:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4;$$

Используя начальные данные, найдём c_1, c_2, c_3, c_4:

$x(t) = c_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} t} + c_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} t} + c_3 cos\sqrt{k_1 k_2} t + c_4 sin\sqrt{k_1 k_2} t$;

Тогда

$\dot{x}(t) = c_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} t}\sqrt{k_1 k_2} - c_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} t}\sqrt{k_1 k_2} - c_3 \sin(\sqrt{k_1 k_2} t)\sqrt{k_1 k_2} + c_4 \cos(\sqrt{k_1 k_2} t)\sqrt{k_1 k_2}$;

$$\ddot{x}(t) = c_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} t} k_1 k_2 + c_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} t} k_1 k_2 - c_3 \cos\left(\sqrt{k_1 k_2} t\right) k_1 k_2 - c_4 \sin\left(\sqrt{k_1 k_2} t\right) k_1 k_2;$$

$\dddot{x}(t) = c_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} t}(k_1 k_2)^{\frac{3}{2}} - c_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} t}(k_1 k_2)^{\frac{3}{2}} + c_3 sin\sqrt{k_1 k_2} t (k_1 k_2)^{\frac{3}{2}} - c_4 cos\sqrt{k_1 k_2} t (k_1 k_2)^{\frac{3}{2}}$;

Подставляя начальные значения ($x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$, $\ddot{x}_0 = -k_1^2 b$, $\dddot{x}_0 = 0$), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \times 0, \\ 0 = c_1\sqrt{k_1 k_2} - c_2\sqrt{k_1 k_2} + c_3 \times 0 + c_4\sqrt{k_1 k_2}, \\ -k_1^2 b = c_1 k_1 k_2 + c_2 k_1 k_2 - c_3 k_1 k_2 + c_4 \times 0, \\ 0 = c_1 (k_1 k_2)^{\frac{3}{2}} - c_2 (k_1 k_2)^{\frac{3}{2}} - c_3 \times 0 - c_4 (k_1 k_2)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Решая с помощью метода Крамера, получим:

$\Delta = -8(k_1 k_2)^3$;

$\Delta_1 = \Delta_2 = -2a(k_1 k_2)^3 + 2k_1^2 b (k_1 k_2)^2$;

$\Delta_3 = -4a(k_1 k_2)^3 - 4k_1^2 (k_1 k_2)^2$;

$\Delta_4 = 0$;

Откуда находим константы:

$$c_1 = \frac{-a(k_1k_2)+k_1^2b}{-4(k_1k_2)}; \quad c_2 = \frac{-a(k_1k_2)+k_1^2b}{-4(k_1k_2)}; \qquad c_3 = \frac{-a(k_1k_2)-k_1^2b}{-2(k_1k_2)}; \; c_4 = 0;$$

Подставляем в общее решение, получим:

$$x(t) = \frac{-a(k_1k_2)+k_1^2b}{-2(k_1k_2)} \times \left(\frac{e^{\sqrt{k_1k_2}t}+e^{-\sqrt{k_1k_2}t}}{2}\right) + \frac{-a(k_1k_2)-k_1^2b}{-2(k_1k_2)} \times \cos\sqrt{k_1k_2};$$

Упрощая получим:

$$x(t) = \frac{ak_2 - k_1b}{2k_2} ch\sqrt{k_1k_2}t + \frac{ak_2 + k_1b}{2k_2} cos\sqrt{k_1k_2}t;$$

Аналогично, решая систему для y, получаем общее решение:

$$y(t) = \frac{ak_2 - k_1b}{2k_1} ch\sqrt{k_1k_2}t + \frac{ak_2 + k_1b}{2k_1} cos\sqrt{k_1k_2}t;$$

2. Найдём решение с помощью операционного исчисления.

Получаем:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k_1^2 y = 0, \\ \ddot{y} + k_2^2 x = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Переходим от оригиналов к изображению, при этом стоит учесть начальные условия:

$$x_0 = a, y_0 = b, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0.$$

Положим

$$x(t) \doteqdot X(p); \; y(t) \doteqdot Y(p).$$

При этом используем правила дифференцирования оригинала:

$$\ddot{x}(t) \doteqdot p^2X(p) - px_0 - x_0 = p^2X(p) - pa;$$

$$\ddot{y}(t) \doteqdot p^2Y(p) - py_0 - y_0 = p^2Y(p) - pb.$$

Тогда уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} p^2X(p) - pa + k_1^2Y(p) = 0, \\ p^2Y(p) - pb + k_2^2X(p) = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p^2X(p) + k_1^2Y(p) = pa, \\ p^2Y(p) + k_2^2X(p) = pb. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$X(p) = \frac{p(p^2a - bk_1^2)}{p^4 - k_1^2k_2^2};$$

и

$$Y(p) = \frac{p(p^2 - bk_2^2)}{p^4 - k_1^2k_2^2};$$

Разложив правую часть $X(p)$ и $Y(p)$ на простые дроби, получим:

$$X(p) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_2} \times \frac{p}{p^2 + k_1k_2} + \frac{ak_2 - bk_1}{2k_2} \times \frac{p}{p^2 - k_1k_2}.$$

$$Y(p) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_1} \times \frac{p}{p^2 + k_1k_2} - \frac{ak_2 - bk_1}{2k_1} \times \frac{p}{p^2 - k_1k_2}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, находим искомые уравнения движения точки:

$$x(t) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_2} cos\sqrt{k_1k_2}t + \frac{ak_2 - bk_1}{2k_2} ch\sqrt{k_1k_2}t;$$

$$y(t) = \frac{ak_2 + bk_1}{2k_1} cos\sqrt{k_1k_2}t + \frac{ak_2 - bk_1}{2k_1} ch\sqrt{k_1k_2}t;$$

Вывод. Как видно найденные уравнения точно такие же, как и в предыдущем методе решения. На основании проделанной работы и сравнения подходов к решению уравнения четвёртого порядка можно убедиться в полноте и расширенности метода прямого решения, т. к. он включает в себя все фундаментальные знания и условия об уравнениях выше первого порядка. Но при этом, с нашей точки зрения, метод операционного исчисления менее затратный, чем метод прямого решения для рассматриваемого класса задач.