УДК 519.21

*Н.А. Колокольникова*
*к.ф.-м.н., доцент, ИГУ*

**Аннотация.** Рассматриваются некоторые варианты случайного размещения частиц по ячейкам. Показывается возможность получения вероятностных распределений с помощью специальных схем последовательных испытаний и аппарата комбинаторных чисел.

**Ключевые слова**: размещение частиц, число пустых ячеек, вероятность, распределение, схема последовательных испытаний.

## Различные схемы случайных размещений

Случайные размещения частиц по ячейкам служат удобными моделями, позволяющими решать разнообразные задачи, возникающие в физике элементарных частиц, теории надежности, теории страхования, экономике и др. Эти модели предполагают, что в ячейках (ящиках) случайным образом размещаются частицы (дробинки). В некоторых моделях частицы считаются неразличимыми, в некоторых – различимыми. Вероятность попадания частицы в любую ячейку может быть одинаковой, а может зависеть от номера ячейки. Таким образом, условия, в которых производится размещение частиц, весьма разнообразны. Случайные величины, изучаемые в конкретной схеме размещения, также различны. Объектом изучения могут быть величины: $\mu_0$ - число ячеек, оставшихся пустыми после размещения всех частиц, $\mu_k$ – число ячеек, содержащих ровно $k$ частиц, $\nu_k$ – частиц, размещенных до того, как впервые окажется $k$ непустых ячеек и т.д.

При решении ряда задач оказывается удобным использование специальных схем последовательных испытаний (например, так называемые В-схема, А-схема, Ф-схема). В случае, когда удается применить одну из этих схем, записывается в явном виде распределение числа непустых (а значит, и пустых) ячеек. Получаются точные и асимптотические формулы для числовых характеристик, устанавливаются предельные распределения.

В докладе демонстрируется решение некоторых из этих задач.

## 1. Классическая задача о дробинках и А-схема последовательных испытаний

Пусть имеется N ячеек, в которых случайным образом размещаются $n$ частиц. Предполагается, что каждая частица с вероятностью $\frac{1}{N}$ может попасть в любую ячейку. Обозначим $\mu_0 = \mu_0(N, n)$ число ячеек, оставшихся пустыми после размещения всех частиц. В [1,с.10] приводится распределение этой величины:

$$P\{\mu_0(N, n) = k\} = \binom{n}{k}(1 - \tfrac{k}{N})^n P\{\mu_0(N - k, n) = 0\}, \qquad (1)$$

где

$$P\{\mu_0(N,n)=0\}=\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-1)^i\,(1-\tfrac{i}{N})^n. \qquad (2)$$

Покажем, что распределение величины $\mu_0$ можно представить в более компактном виде. Для этого рассмотрим А-схему последовательных испытаний.

Предположим, что проводятся испытания типа «успех-неуспех», и после каждого успеха вероятность следующего успеха (а значит, и неуспеха) может меняться. После неуспеха изменения вероятностей не происходит. Такая схема называется А-схемой последовательных испытаний.

Пусть $\xi_n$ – число успехов в $n$ испытаниях, проводимых в условиях А-схемы, $p_i$- вероятность ($i$+1)-го успеха, т.е. $\overline{0,n}$.

$$p_i=P\{\xi_{n+1}=i+1\mid\xi_n=i\},$$

$$q_i=P\{\xi_{n+1}=i\mid\xi_n=i\}=1-\,p_i,\quad i=\overline{0,n}.$$

**Теорема 1**.[2] Если последовательные испытания проводятся в условиях А-схемы, то

$$P\{\xi_n=0\}=A_{0,}^{n}$$

$$P\{\xi_n=k\}=A_k^n\quad\times\prod_{i=0}^{k-1}p_i\,,\ k=\overline{1,n},\ n=\overline{1,\infty}. \qquad (3)$$

Здесь $A_k^n$ – обобщенные числа Стирлинга 2-го рода, строящиеся на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Будем считать, что частицы последовательно «бросаются» в ячейки. Под успехом будем понимать попадание очередной частицы в пустую ячейку, под неуспехом – попадание в ячейку, где уже находится по меньшей мере одна частица. Нетрудно видеть, что выполняются условия А-схемы последовательных испытаний. Вероятность успеха в очередном испытании, если ранее было зафиксировано $i$ успехов, равна

$$p_i=\frac{N-i}{N}\,,\quad i=\overline{0,\min(n,N)}\,.$$

Для случайной величины $\xi_n$ – числа непустых ячеек после размещения $n$ частиц – имеем

$$P\{\xi_n=0\}=0,$$

$$P\{\xi_n=k\}=A_k^n(N)_k\,\tfrac{1}{N^k},\quad k=\overline{1,\min(n,N)}\,,\ n=\overline{1,\infty},$$

где числа $A_k^n$ строятся на базе $\left\{\frac{i}{N}\right\}_{i=0}^{\min(n,N)}$,

$$(N)_k=N(N-1)\ldots(N-k+1).$$

В данном случае, используя свойства чисел $A_k^n$, получим

$$A_k^n=\tfrac{1}{N^{n-k}}\,a_k^n\,,$$

где $a_k^n$ – числа Стирлинга второго рода. Поэтому

$$P\{\xi_n=k\}=a_k^n(N)_k\,\tfrac{1}{N^n},\quad k=\overline{1,\min(n,N)}\,,\ n=\overline{1,\infty}. \qquad (4)$$

Поскольку

$$\mu_0=\mu_0(N,n)=N-\xi_n,$$

то

$$P\{\mu_0(N,n)=k\}=a_{N-k}^n(N)_{N-k}\,\tfrac{1}{N^n}.$$

Формула (3), безусловно, является более удобной для применения, чем формула (1) с использованием (2).

## 2. Размещение частиц комплектами и Ф-схема последовательных испытаний

Имеется $N$ ячеек, в которых случайным образом размещают $r$ комплектов, каждый из которых содержит $m$ частиц. Частицы любого комплекта размещаются в ячейках по одной, причем все $\binom{N}{m}$ возможных размещений считаются равновероятными. Этот случай описан в книге [1] и изучался, например, в работе [3]. Как и выше, будем изучать случайную величину $\mu_0$ – число ячеек, оставшихся пустыми после размещения всех комплектов. Используем так называемую Ф-схему последовательных испытаний. Опишем эту схему.

Пусть проводятся испытания типа «успех-неуспех». Обозначим $p_{nk}$ условную вероятность успеха в $n$-м испытании, если в предыдущих $n$-1 испытаниях реализовалось $k$ успехов, $q_{nk} = 1 - p_{nk}$ – вероятность неуспеха при том же условии. Если $p_{nk}$ имеет вид $p_{nk}=\alpha_{n-1}(C-k)$, $n=\overline{1,\infty}$, $k=\overline{0,n-1}$, где $C$ – некоторое большое натуральное число, то имеем один из вариантов Ф-схемы последовательных испытаний.

**Теорема 2**.[4] Если последовательные испытания проводятся в условиях описанного варианта Ф-схемы, то $\xi_n$ – число успехов в $n$ испытаниях - имеет распределение

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, (C)_k\,, \quad k=\overline{0, \min(n,C)}\,, \; n=\overline{1,\infty}, \tag{5}$$

где $(C)_0 = 1$, $(C)_k = \prod_{j=0}^{k-1} C - j)$, $k \geq 1$.

Числа $\Phi_k^n$ могут быть определены с помощью рекуррентной формулы

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - C + k\right)\Phi_k^{n-1}, \; k=\overline{0,n}, \; n=\overline{1,\infty},$$

причем $\Phi_n^n = 1, n=\overline{1,\infty}$, $\Phi_k^n = 0$, если $k$<0 или $n$<$k$.

Опишем размещение частиц по ячейкам, используя Ф-схему последовательных испытаний. Будем считать, что частицы по одной бросаются в ячейки. Сначала размещаются частицы первого комплекта. Они, как было указано выше, займут $m$ ячеек. Затем поочередно размещаются частицы второго, потом третьего комплекта и т.д. Считаем успехом попадание частицы в пустую ячейку, неуспехом – попадание ее в ячейку, где уже находится по меньшей мере одна частица. Начнем нумерацию испытаний и успехов с размещения частиц второго комплекта. Имеем

$$p_{nk} = \frac{N-m-k}{N-n+\left[\frac{n-1}{m}\right]m+1}, \quad q_{nk} = \frac{m-n+\left[\frac{n-1}{m}\right]m+k+1}{N-n+\left[\frac{n-1}{m}\right]m+1},$$

$k=\overline{0, \min(n-1, N-m)}$, $n=\overline{1, m(r-1)}$.

Здесь $[x]$ – целая часть числа $x$. Структура вероятностей $p_{nk}$ и $q_{nk}$ соответствует описанной выше Ф-схеме испытаний. При этом

$$\{\alpha_i\}_{i=0}^{m(r-1)-1}=\{\frac{1}{N},\frac{1}{N-1},\dots,\frac{1}{N-m+1},\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N-m+1},\dots,\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N-m+1}\}; \quad (6)$$

$$\{\beta_i\}_{i=0}^{m(r-1)-1}=\{N-m-i\}_{i=0}^{m(r-1)-1}. \quad (7)$$

Если размещены $r$ комплектов, каждый из которых имеет объем $m$, то $n = rm$. Поскольку $\mu_0 = N - m - \xi_n$, то справедливо следующее утверждение:

**Теорема 3.** При равновероятном размещении $r$ комплектов одинакового объема $m$ по $N$ ячейкам распределение числа пустых ячеек имеет вид

$$P\{\mu_0 = k\} = P\{\xi_{mr} = N - m - k\} = \Phi_{N-m-k}^{mr}\,(N-m)_k \prod_{i=0}^{m(r-1)-1}\alpha_i, \quad (8)$$

$k = \overline{0, N-m}.$

Для нахождения значения $\Phi_{N-m-k}^{mr}$ и $\prod_{i=0}^{m(r-1)-1}\alpha_i$ в формуле (8) используются конечные последовательности (6) и (7).

Результат, обобщающий (8), может быть получен для случая, когда размещаются комплекты разного объема.

## 3. Размещение случайного числа частиц

Предположим, что имеется $N$ ячеек, в которых случайным образом размещаются $\nu$ частиц, где $\nu$ – случайная величина, закон распределения которой известен. Предполагается, что каждая размещаемая частица с вероятностью $\frac{1}{N}$ может попасть в любую ячейку. Рассмотрим несколько случаев такого размещения, некоторые из которых описаны в работе [5].

### 3.1. Число размещаемых частиц - случайная величина, распределенная по закону Пуассона

Пусть $\nu$ – величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda$, т.е.

$$P\{\nu = n\} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n = \overline{0,\infty}.$$

**Теорема 4.** Если число размещаемых частиц – случайная величина, распределенная по закону Пуассона, то $\mu_0$ – число пустых ячеек – случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами $(N, 1-p)$.

**Доказательство**. Заметим, что величина $\xi_\nu$– число непустых ячеек имеет распределение

$$P\{\xi_\nu = k\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\nu = n\}\,P\{\xi_\nu = k/\nu = n\}=\sum_{n=0}^{\infty} P\{\nu = n\}\,P\{\xi_n = k\}. \quad (9)$$

При этом, если $\nu$=о, то $\xi_0 = 0$, а величина $\xi_n$ при $n \geq 1$ имеет распределение (4). Таким образом,

$$P\{\xi_\nu = k\} = e^{-\lambda}(N)_k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!N^n}a_k^n = (N)_k e^{-\lambda}\frac{1}{k!}(e^{\frac{\lambda}{N}}-1)^k, k = \overline{0,\infty}, \quad (10)$$

поскольку экспоненциальная производящая функция чисел Стирлинга 2-го рода имеет вид

$$A_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_k^n \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}.$$

.

Очевидно, что равенство (10) можно записать:

$$P\{\xi_\nu = k\} = \binom{N}{k}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{N}}\right)^k (e^{-\frac{\lambda}{N}})^{N-k},\ \ k=\overline{0,N},$$

где $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k!)}$. Это означает, что величина $\xi_\nu$ распределена по биномиальному закону с параметрами $(N,p)$, где $p = 1-e^{-\frac{\lambda}{N}}$. Следовательно, величина $\mu_0 = N - \xi_\nu$ также имеет биномиальное распределение, но с параметрами $(N, 1-p)$, что и требовалось доказать.

## 3.2. Число размещаемых частиц имеет биномиальное распределение

Предположим, что величина $\nu$ распределена по биномиальному закону с параметрами *(m,p)*, где $m$ – достаточно большое натуральное число, т.е.

$$P\{\nu = n\} = \binom{m}{n} p^n q^{m-n}, n=\overline{0,m}, q = 1-p. \tag{11}$$

Тогда, на основании формул (9), (4) и (11), имеем

$$P\{\xi_\nu = k\} = (N)_k \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} p^n q^{m-n} \frac{1}{N^n} a_k^n. \tag{12}$$

Учитывая связь биномиальных коэффициентов и обобщенных чисел Стирлинга 1-го рода (см., например, [2], гл.1), равенство (12) можем представить в виде

$$P\{\xi_\nu = k\} = (N)_k \frac{p^m}{N^m} \sum_{n=k}^{m} B_n^m a_k^n, \tag{13}$$

где $B_n^m$ – обобщенные числа Стирлинга 1-го рода, строящиеся на базе $\left\{\frac{Nq}{p}\right\}_{i=0}^{m-1}$, $q = 1-p$. Вид правой части равенства (13) позволяет записать распределение случайной величины $\xi_\nu$ следующим образом [2,гл.4, С. 133-134]:

$$P\{\xi_\nu = k\} = \frac{p^m}{N^m}(N)_k \Phi_k^m,\ \ k=\overline{0,\min(m,N)}. \tag{14}$$

В формуле (14) $\Phi_k^m$– комбинаторные числа, строящиеся на базах $\left\{\frac{Nq}{p}\right\}_{i=0}^{m-1}$, $\{i\}_0^N$. Эти числа удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\Phi_k^m = \Phi_{k-1}^{m-1} + \left(\frac{Nq}{p} + k\right)\Phi_k^{m-1},\ \ k=\overline{0,m}, m \geq 1. \tag{15}$$

Таким образом, доказана

**Теорема 5.** Если число размещаемых частиц – случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами $(m,p)$, то $\xi_\nu$ – число непустых ячеек (а значит, и $\mu_0$ - число пустых ячеек) – случайная величина, имеющая Ф-распределение.

### 3.3. Число размещаемых частиц имеет В-распределение

Предположим, что имеется $m$ частиц, каждая из которых может размещаться в одну их $N$ ячеек, а может и вообще не подлежать размещению. Пусть $p_i$ – вероятность того, что $i$ –я частица будет участвовать в процессе размещения, $q_i = 1 - p_{i,}\ i = \overline{1,m}$. Таким образом, применяя В-схему последовательных испытаний [2, гл.4], получим распределение числа размещенных частиц

$$P\{\nu = n\} = \prod_{i=1}^{m} \overline{B_n^m}, n = \overline{1,m}, \tag{16}$$

где $\overline{B_n^m}$ – обобщенные числа Стирлинга 1-го рода, строящиеся на базе $\left\{\frac{q_i}{p_i}\right\}_{i=1}^{m}$.

Используя формулы (9), (3), (16), а также свойства обобщенных чисел Стирлинга 1-го рода, можем получить явный вид распределения величины $\xi_\nu$, аналогичный (14):

$$P\{\xi_\nu = k\} = (N)_k \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{N} \Phi_k^m, k = \overline{0, \min(m,N)}, \tag{17}$$

где числа $\Phi_k^m$ строятся на базах $\left\{\frac{Nq_i}{p_i}\right\}_{i=1}^{m}, \{i\}_0^N$. Рекуррентная формула для этих чисел аналогична (15), только $p$ и $q$ меняются в ней на $p_m$ и $q_m$ соответственно.

Используя формулу (17), можем записать распределение величины $\mu_0$, поскольку $P\{\mu_0, = k\} = P\{\xi_\nu = N - k\}$. Следовательно, доказана теорема:

**Теорема 6.** Если число размещаемых частиц – случайная величина, имеющая В-распределение, то число непустых ячеек $\xi_\nu$ и число ячеек, оставшихся пустыми, $\mu_0$ имеют Ф-распределение.

## 4. Размещение частиц в две совокупности ячеек

Иногда комбинаторные схемы можно применять при размещении частиц в несколько совокупностей ячеек. Покажем это на примере двух совокупностей [6]. Предположим, что $n$ частиц размещаются в $N$ ячейках, но при этом каждая частица с вероятностью $\alpha$ попадает в любую из $N_1 < N$ ячеек и с вероятностью $\beta$ – в любую из остальных $N_2 = N - N_1$ ячеек, т.е.

$\alpha N_1+\beta N_2=1$. Не умаляя общности, можно считать, что имеется две совокупности ячеек объемом соответственно $N_1$ и $N_2$, причем $N_1+N_2=N$. Каждая из размещаемых частиц с вероятностью $p_1$ попадает в первую совокупность и с вероятностью $p_2$ – во вторую. Попав в какую-либо совокупность ячеек, частица с одинаковой вероятностью может оказаться в любой ячейке этой совокупности (т.е. попадание в каждую ячейку первой совокупности возможно с вероятностью $\frac{1}{N_1}$, а в любую ячейку второй совокупности – $\frac{1}{N_2}$).

Как и ранее, успехом будем считать попадание частицы в пустую ячейку, $\xi_n$ - общее число непустых ячеек после размещения $n$ частиц.
Пусть $P_i$ – вероятность ($i$+1)-го успеха, $i$=0,1,... Очевидно, что $P_0=1$. Вероятность 2-го успеха находится следующим образом:

$$P_1=p_1^2\frac{N_1-1}{N_1}+p_1p_2\frac{N_2}{N_2}+p_2p_1\frac{N_1}{N_1}+p_2^2\frac{N_2-1}{2}=$$
$$=p_1^2+2p_1p_2+p_2^2-\frac{p_1^2}{N_1}-\frac{p_2^2}{N_2}=1-\left(\frac{p_1^2}{N_1}+\frac{p_2^2}{N_2}\right).$$

Продолжая процесс нахождения вероятностей $P_i$, предполагая, что $i\le\min(N_1,N_2)$, получим

$$P_i=p_1^{i+1}\frac{N_1-i}{N_1}+\binom{i}{1}p_1^ip_2\frac{N_1-(i-1)}{N_1}+\cdots+\binom{i}{i}p_1p_2^i\frac{N_1}{N_1}+$$
$$+p_2^{i+1}\frac{N_2-i}{N_2}+\binom{i}{1}p_2^ip_1\frac{N_2-(i-1)}{N_2}+\cdots+\binom{i}{i}p_2p_1^i\frac{N_2}{N_2}=$$
$$=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(p_1^{i+1-j}p_2^j\frac{N_1-(i-j)}{N_1}+p_2^{i+1-j}p_1^j\frac{N_2-(i-j)}{N_2}\right)=$$
$$=1-i\left(\frac{p_1^2}{N_1}+\frac{p_2^2}{N_2}\right).$$

Поскольку вероятности успехов меняются после каждого успеха, то находимся в условиях А-схемы последовательных испытаний, и распределение числа непустых ячеек – это распределение числа успехов в $n$ испытаниях, которое определяется формулой (3). В данном случае базовые элементы, из которых строятся числа $A_k^n$, имеют вид

$$Q_i=\ i\left(\frac{p_1^2}{N_1}+\frac{p_2^2}{N_2}\right),\quad i=\overline{0,\min(N_1,N_2)}\,.$$

Обозначим

$$S=\frac{p_1^2}{N_1}+\frac{p_2^2}{N_2}.$$

Тогда

$$P_i=1-iS,\ \ Q_i=iS,\ i=\overline{0,\min(N_1,N_2)}\,.$$

Это значит, что $A_k^n=S^{n-k}a_k^n$, а

$$P\{\xi_n=k\}=S^{n-k}a_k^n\prod_{i=0}^{k-1}(1-iS)\,,\quad k=\overline{1,\mathrm{n}},\ n=\overline{1,\min(N_1,N_2)}. \qquad (18)$$

Таким образом, согласно формуле (18),

$$P\{\mu_0(N,n)=k\}=S^{n-N+k}a_{N-k}^n\prod_{i=0}^{N-k-1}(1-iS).$$

Данное распределение, как и предыдущее, имеет место, если $n\le\min(N_1,N_2)$.

**Замечание 1**.Пусть $N_1 < n \le N_2$. Тогда при $i \le N_1$ вероятности $P_i$ имеют вид (6), а при $i > N_1$

$$P_i = 1 - i\left(\frac{p_1^2}{N_1} + \frac{p_2^2}{N_2}\right) - \frac{1}{N_1}\sum\nolimits_{j=0}^{i-N_1}\binom{i}{j} p_1^{i+1-j} p_2^{j}(N_1 - i + j) -$$

$$-\frac{1}{N_2}\sum\nolimits_{j=0}^{i-N_1-1}\binom{i}{j} p_1^{i-j} p_2^{j+1}(N_2 - j).$$

**Замечание 2.** Если $n > \min(N_1, N_2)$, то при $i > \min(N_1, N_2)$ вероятности $P_i$ удобнее вычислять по общей формуле

$$P_i = \sum\nolimits_{j=\max(0,i-N_1)}^{\min(i,N_2)}\binom{i}{j} p_1^{i-j+1} p_2^{j}\frac{N_1 - (i-j)}{N_1} +$$

$$+\sum\nolimits_{j=\max(0,i-N_2)}^{\min(i,N_1)}\binom{i}{j} p_2^{i-j+1} p_1^{j}\frac{N_2 - (i-j)}{N_1}.$$

Таким образом, в работе продемонстрирована возможность рассмотрения ряда вариантов случайного размещения частиц с использованием схем последовательных испытаний и аппарата комбинаторных чисел. Поскольку А- и Ф- распределения являются достаточно хорошо изученными, то для случайных величин, фигурирующих в рассмотренных задачах, могут быть приведены формулы для числовых характеристик и указаны условия сходимости к предельным распределениям.

## Использованные источники


1. Колчин В.Ф. Случайные размещения / В.Ф. Колчин, Б.А. Севастьянов, В.П.Чистяков. – М: Наука, 1976. – 288 с.
2. Докин В.Н. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений / В.Н. Докин, В.Д. Жуков, Н.А. Колокольникова, О.В. Кузьмин, М.Л. Платонов. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 208 с.
3. Ватутин В.А. Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами / В.А. Ватутин, В.Г. Михайлов.// Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – Т.27, №4. – С.684-692.
4. Колокольникова Н.А. Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний / Н.А. Колокольникова. – ВИНИТИ, 25.02.1992. – №649. – В 92 ДЕП. – 25 с.
5. Колокольникова Н.А. Вероятностные модели теории страхования, использующие схемы случайного размещения частиц / Н.А. Колокольникова // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – Вып. 15. – Иркутск: ИрГУПС, 2016. – С. 66-72.

6. Колокольникова Н.А. О некоторых обобщениях классической задачи о дробинках / Н.А. Колокольникова // Материалы Региональной конференции «Платоновские чтения». – Иркутск, 2019 – 5с. http://math.isu.ru/ru/chairs/tpdm/docs/Platonovskie2019/Kolokolnikova-PR-2019-s.pdf.