Случайные блуждания на полупрямой с поглощающим или отражающим экраном

Аннотация.

В статье сравниваются два типа задач о случайном блуждании. Находятся закономерности между блужданиями с поглощающим экраном и блужданиями с отражающим экраном.

Ключевые слова.

Случайные блуждания, траектории, поглощающий экран, отражающий экран, распределение запасов, числа Каталана, числа Моцкина.

Введение.

Задачи о случайных блужданиях рассматриваются в теории систем массового обслуживания и систем управления запасами. Например, на некоем складе хранится товар. Товар поступает на склад равными порциями через равные промежутки времени и расходуется с постоянной скоростью так, что к моменту очередного поступления его запасы становятся равными нулю. Вместо склада может быть банк, который управляет поступающими деньгами, плотина, управляющая поступающей водой.

Глава 1 Случайные блуждания с поглощающим экраном.

Перемещение частицы начинается в точке $x=0$ и может происходить как по всей прямой, так и на некотором ограниченном отрезке. В последнем случае говорят о границах (экранах), поставленных на пути движения частицы. В этой статье рассмотрены два вида экранов: поглощающий и отражающий. Если частица попадает на поглощающий экран, то на этом ее движение заканчивается. Если частица достигает отражающего экрана, то в следующий момент времени она может продолжить движение только в противоположную сторону.

Для одномерного случайного блуждания в зависимости от вида экранов можно рассматривать несколько задач.

Задача 1. Стандартная задача о случайном блуждании частицы с поглощающим экраном имеет следующее условие. Частица, выходящая из точки $x = 0$, совершает случайные блуждания на полупрямой $[0, \infty)$. Перемещение осуществляется скачками в дискретный момент времени. В результате каждого скачка [шага], частица перемещается вправо или влево. В точке $x = -1$ установлен поглощающий экран. Изучается количество допустимых траекторий до поглощения за заданное число шагов N.

Данный вид задач был подробно разобран в статьях [2],[3].

Допустимой является траектория ведущая в поглощающий экран, при перемещении по которой частица попадает в экран только на N-ом шаге.

Данная задача была подробно рассмотрена в статье [1]. В результате решения этой задачи оказывается, что количество допустимых траекторий, ведущих в поглощающий экран за заданной число шагов образуют последовательность чисел Каталана (первые 10 членов последовательности: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862). Аналитическая формула чисел Каталана [1]

$$C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \quad \text{где } C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!n!},\ 2n = N - 1 .$$

Глава 2. Случайные блуждания с отражающим экраном.

Задача 2. Частица, выходящая из точки $x = 0$, совершает случайные блуждания на полупрямой $[0, \infty)$. Перемещение осуществляется скачками в дискретный момент времени. В результате каждого скачка [шага], частица перемещается вправо или влево. В точке $x = -1$ установлен отражающий экран. Изучается количество допустимых траекторий, ведущих в любую точку при заданном числе шагов.

Для решения этой задачи визуализируем перемещения с помощью треугольника Паскаля.

Треугольник Паскаля [4] - бесконечная таблица биномиальных коэффициентов C_n^k. каждое число равно сумме расположенных над ним чисел.

Таблица 1. Треугольник Паскаля.

n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
6		1		6		15		20		15		6		1	
7	1		7		21		35		35		21		7		1

Эта таблица визуализирует случайные блуждания без ограничений (без экранов), начинающиеся в точке $x = 0$.

Посмотрим, как изменится таблица, если в точку $x = -1$ установить отражающий экран.

Таблица 2. Треугольник Паскаля с отражающим экраном в точке $x = -1$

n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								1							
1							1		1						
2								2		1					
3							2		3		1				
4								5		4		1			
5							5		9		5		1		
6								14		14		6		1	
7							14		28		20		7		1

Из таблицы 2 видно, что частица не может пройти через экран, левее точки $x = -1$. Также видно, что после попадания в экран частица продолжает блуждание, а значит числа из столбца -1 влияют на числа из столбца -2.

Число допустимых траекторий, ведущие в отражающий экран тоже образует последовательность чисел Каталана, начинающуюся со второго элемента.

Посмотрим, как изменится таблица, если вместо отражающего экрана будет поглощающий.

Таблица 3. Треугольник Паскаля с поглощающим экраном в точке $x = -1$

n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								1							
1							1		1						
2								1		1					
3							1		2		1				
4								2		3		1			
5							2		5		4		1		
6								5		9		5		1	
7							5		14		14		6		1

При визуализации случая из задачи 1 видно, значения в столбце -1 не влияют на столбец -2, а значит частица после попадания в поглощающий экран прекращает блуждание. Так же явно видна последовательность чисел Каталана в столбце, где установлен поглощающий экран.

Рассмотрим столбец 0, справа от поглощающего экрана. числа попадающие в этот столбец либо без изменения переносятся в поглощающий экран влево, либо отражаются обратно вправо. На числа стоящие в этом столбце не действуют числа стоящие слева, потому что там находится поглощающий экран. Если скрыть тот столбец, где находится поглощающий экран, то получится, что числа распределяются в таблице по принципу отражающего экрана, расположенного в точке $x = 0$.

Для большей наглядности перенесем поглощающий экран в точку $x = -2$.

Таблица 4. Треугольник Паскаля с поглощающим экраном в точке $x=-2$															
n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3							2		3		1				
4						2		5		4		1			
5							5		9		5		1		
6						5		14		14		6		1	
7							14		28		20		7		1

Очевидно, что таблица 4 совпадает с таблицей 1 за исключением столбца -2. А значит можно использовать одинаковые методы для двух разных задач, так как они дополняют друг друга по свойствам и совпадают по значениям.

Таблица 5. Треугольник Паскаля визуализация изменений после установки экрана.															
n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3							2		3		1				
4						2		5		4		1			
5							5		9		5		1		
6						5		14		14		6		1	
7							14		28		20		7		1

После установки отражающего экрана в точку $x = -1$ (или поглощающего в точку $x = -2$) неизменными остались только крайние правые диагонали.

посмотрим насколько изменились числа после установки. изменения запишем в ту же таблицу, симметрично относительно поглощающего экрана, то есть столбца $x = -2$.

Таблица 6. Треугольник Паскаля изменения после установки экрана, записанные симметрично слева, относительно столбца -2.

n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		2		3		1				
4				1		2		5		4		1			
5			1		5		5		9		5		1		
6		1		6		5		14		14		6		1	
7	1		7		21		14		28		20		7		1

Число 1, стоящее в ячейке ([строка] 3, [столбец] -3) является разницей между значениями ячейки (3, -1) в таблице 1 и таблице 5 до и после установки экрана. Треугольник, получившийся таким путем, совпадает с соответствующей частью треугольника Паскаля. Получается, что при установке отражающего экрана в точку $x = -1$, треугольник “складывается” и накладывающиеся значения вычитаются. поглощающий экран в этом случае является линией сгиба.

Теперь запишем формулу для попадания в любую точку, при установленном отражающем экране.

Для этого запишем треугольник Паскаля и последние результаты через биномиальные коэффициенты.

Таблица 7. Треугольник Паскаля через биномиальные коэффициенты															
n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								C_0^0							
1							C_1^0		C_1^1						
2						C_2^0		C_2^1		C_2^2					
3					C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3				
4				C_4^0		C_4^1		C_4^2		C_4^3		C_4^4			
5			C_5^0		C_5^1		C_5^2		C_5^3		C_5^4		C_5^5		
6		C_6^0		C_6^1		C_6^2		C_6^3		C_6^4		C_6^5		C_6^6	
7	C_7^0		C_7^1		C_7^2		C_7^3		C_7^4		C_7^5		C_7^6		C_7^7

Таблица 8. Значения, полученные в таблице 6, записанные через биномиальные коэффициенты.															
n\x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								C_0^0							
1							C_1^0		C_1^1						
2						C_2^0		C_2^1		C_2^2					
3					C_3^0		$C_3^1 - C_3^0$		C_3^2		C_3^3				
4				C_4^0		C_4^1		$C_4^2 - C_4^0$		C_4^3		C_4^4			
5			C_5^0		C_5^1		$C_5^2 - C_5^1$		$C_5^3 - C_5^0$		C_5^4		C_5^5		
6		C_6^0		C_6^1		C_6^2		$C_6^3 - C_6^1$		$C_6^4 - C_6^0$		C_6^5		C_6^6	
7	C_7^0		C_7^1		C_7^2		$C_7^3 - C_7^2$		$C_7^4 - C_7^1$		$C_7^5 - C_7^0$		C_7^6		C_7^7

Так как треугольник Паскаля симметричен относительно вертикальной оси, то для удобства вычтем симметричные значения справа. Тогда общая формула для попадания в любую точку при установленном отражающем экране в точке $x = -1$, будет выглядеть следующим образом.

$$C_n^k - C_n^{k+2},$$

$k = \overline{0, n}$, n - заданное число шагов.

Литература

1. *С. К. Ландо.* Лекции по комбинаторике. — МЦНМО, 1994
2. Малахов Е.И. “Алгоритмический подход к задачам дискретных случайных блужданий на полупрямой”/ Е.И. Малахов // Прикладные задачи дискретного анализа. - Иркутск 2019. - с. 108-115.
3. Малахов Е.И. Случайные блуждания на прямой с поглощающим экраном/Е.И. Малахов // Вестник Иркутского университета – Иркутск: Издательство ИГУ, - Вып.19. с.117
4. Комбинаторные методы моделирования дискретных распределений : Учеб. пособие / О.В. Кузьмин. - Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 2003. - 136 с.