СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЧИСЛА И ПУТИ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕТКАХ

А.А. Иванов[1], Г.Д. Коробейников[2]

Аннотация. Описываются специальные комбинаторные числа, их производящие функции и рекуррентные соотношения. Приводятся некоторые комбинаторные свойства этих чисел. Описываются дискретные математические объекты – целочисленная решетка и комбинаторные пути на решетке. Приводятся определения путей на решетке и описываются способы их построения. Приводятся интерпретации комбинаторных путей как множество точек на целочисленной решетке.

Ключевые слова: специальные комбинаторные числа, числа Каталана, числа Моцкина, числа Шредера, числа Деланноя, производящие функции, рекуррентные соотношения, пути Мак-Магона, пути Моцкина, пути Дика, пути Шредера, пути Деланноя

Введение

Настоящая работа посвящена изучению траекторий на решетках, основанных на применении специальных комбинаторных чисел.

Решетка является частично упорядоченным множеством, в котором каждое двух элементное подмножество имеет как точную верхнюю, так и нижнюю грань. Также решетки можно рассматривать как некоторые конфигурации, то есть конечное множество точек, прямых, плоскостей связанных между собой.

В данной работе решетки рассматриваются как геометрические схемы, представляющие собой системы линий, соединяющие некоторые заданные точки.

Одной из задач на решетках является перечисление траекторий между фиксированными точками.

Под траекториями обычно понимаются пути, являющиеся последовательностями точек целочисленной решетки плоскости с некоторыми ограничениями на приращение координат при переходе от одной точки к следующей. Эти способы, в своей сущности, имеют комбинаторную природу, что позволяет использовать комбинаторные числа для перечисления путей на решетках.

SPECIAL COMBINATORY NUMBERS AND WAYS ON INTEGRAL LATTICES

A. Ivanov[1],G. Korobeinikov[2]

Annotation. Special combinatorial numbers, their generating functions and recurrence relations are described. Some combinatorial properties of these numbers are presented. Discrete mathematical objects are described - an integer lattice and combinatorial paths on a lattice. The definitions of paths on a lattice are given and methods of their construction are described. Interpretations of combinatorial paths are given as a set of points on an integer lattice.

Keywords: special combinatorial numbers, Catalan numbers, Motzkin numbers, Schroeder numbers, Delannoy numbers, generating functions, recurrence relations, McMahon paths, Motzkin paths, Dick paths, Schroeder paths, Delannoy paths.

[1] **Иванов Алексей Александрович,** студент, ИМИТ ИГУ
[2] **Коробейников Глеб Дмитриевич,** студент, ИМИТ ИГУ

1. Специальные комбинаторные числа

Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. *Производящей функцией* (производящим рядом) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ \ldots,$$

или, в сокращенной записи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом*.

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных и целых чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, часто обозначают одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ \ldots$$

Замечание: Термин «производящая функция» не означает, что написанное выражение действительно является функцией. В частности, невозможно сказать, чему равно значение $A(s_0)$ производящей функции A в точке s_0. Переменная s является формальной, и сумма ряда $a_0 + a_1 s_0 + a_2 s_0^2 + \ldots$ смысла не имеет. Однако верно утверждение $A(0) = a_0$, т.е. мы знаем значение производящей функции в нуле.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» используют также термин «формальный степенной ряд».

Производящие функции дают возможность просто описывать многие сложные последовательности в комбинаторике, а иногда помогают найти для них явные формулы. Метод производящих функций был разработан Эйлером в 1750-х годах.

1.1 Числа Каталана

Порядок вычислений в арифметических выражениях задается расстановкой скобок, например,

$$(4 - 2) \cdot (6 + (20 - 14) \cdot (6 + 2))$$

Если стереть все элементы выражения за исключением скобок, то оставшиеся скобки образуют правильную скобочную структуру:
()(()()).

Числа Каталана C_n можно определить как число различных правильных скобочных структур из n пар скобок.

Удобно полагать $c_0 = 1$. Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел [1-6].

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1) и 2), является правильной скобочной структурой.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Задача 1. Сколько всего существует правильных скобочных последовательностей, состоящих из $2n$ скобок (n открывающих и n закрывающих)?

Решение. Пусть $C_n -$ ответ к нашей задаче. Положим по определению $C_0 = 1$. Очевидно, что любая правильная скобочная последовательность начинается с открывающей скобки. Между ней и соответствующей ей закрывающей скобкой можно расположить правильную последовательность из $2k$ скобок (где $0 \leq k < n$). Следовательно, чтобы узнать количество правильных скобочных последовательностей из $2n$ скобок, нужно перебрать все возможные способы расположить $2k$ скобок в зоне между этими скобками и $2(n-k-1)$ скобок после неё. Получаем *рекуррентное соотношение*:

$$C_0 = 1,$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, n > 0.$$

Это соотношение нужно решить и вывести общую формулу. Будем искать производящую функцию в виде

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

В рекуррентном соотношении домножаем C_n на z^n:

$$z^0 C_0 = z^0,$$

$$z^n C_n = z^n \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, n > 0.$$

Выполняя суммирования по всем n, получаем

$$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Сумма в этом выражении есть произведение производящих функций:

$$G(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Следовательно, окончательное уравнение для производящей функции имеет вид

$$G(z) = 1 + zG^2(z),$$

или, что то же самое,

$$zG^2(z) - G(z) + 1 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения легко найти *производящую функцию Каталана*:

$$G(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Теперь нужно определиться, какой из двух корней нас интересует. Заметим, что $G(z)$ должно быть равно 1 при $z = 0$, следовательно, нам подходит корень со знаком минус:

$$G(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Осталось разложить в ряд полученное выражение (здесь мы пользуемся расширенными биномиальными коэффициентами):

$$G(z) = \frac{1}{2z} - \frac{\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-4z)^n C_{\frac{1}{2}}^n =$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4z)^n(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}C_{2n}^{n} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-z^n}{2n-1}C_{2n}^{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4n-2}C_{2n}^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4n-2}C_{2n+2}^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Откуда получается, *явная формула* для вычисления чисел Каталана:

$$C_n = [z^n]G(z) = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Выведенная формула даёт ещё одно, более простое *рекуррентное соотношение:*

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}, n > 0$$

и, соответственно, другое выражение через биноминальные коэффициенты:

$$C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}.$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Известно несколько сотен их различных определений. На сегодняшний день можно перечислить около четырехсот задач математики и физики, в которых встречаются эти числа.

1.2. Числа Моцкина

Предположим теперь, что кроме открывающей и закрывающей скобок в последовательности может присутствовать ещё один символ, не нарушающий правильность правильных скобочных последовательностей [3-5]. Например, символ "0". Такую последовательность будем называть "правильная скобочная последовательность, разрежённая нулями". Например, количество таких последовательностей, состоящих из 4 элементов, равно 9:

()(), (()), 0000, 0()0, ()00, 00(), 0(0), (0)0, (00).

Выведем формулу для количества M_n правильных скобочных последовательностей, разрежённых нулями и состоящих из n символов. Сперва отметим, что число пар скобок, которые могут присутствовать в такой правильной скобочной последовательности, разрежённой нулями, равно $\left[\frac{n}{2}\right]$, где $[x]$ −целая часть числа x. Если некоторая правильная скобочная последовательность, разрежённая нулями, содержит правильных скобочных последовательностей из k пар скобок, то в ней также содержится $n-2k$ символов "0". Скобки, которые соответствуют правильным скобочным последовательностям, могут быть упорядочены C_k способами и установлены на n свободных позиций C_n^{2k} способами (остальные позиции занимают символы "0"). Таким образом, общая формула имеет вид

$$M_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i}C_i, \text{ где } C_i = \frac{1}{i+1}C_{2i}^{i}.$$

Числа Моцкина также можно интерпретировать, как *количество маршрутов шахматного короля* из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером $(n+1)\times(n+1)$ при условии, что он может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

Последовательность чисел Моцкина начинается так:

1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, …

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Моцкина, найдем сначала *рекуррентное соотношение* для этих чисел.

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}.$$

Будем искать производящую функцию в виде

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n.$$

Решая это получим: $G(z) = 1 + zG(z) + z^2G^2(z)$,

$$z^2G^2(z) + G(z)(z-1) + 1 = 0,$$

$$G(z) = \frac{(1-z) - \sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}.$$

1.3. Числа Шрёдера

Числа Шрёдера S_n в комбинаторике описывают количество путей из левого нижнего угла квадратной решётки $n \times n$ в противоположный по диагонали угол, используя ходы вверх (0,1), вправо (1,0) или вверх-вправо (1,1), при этом пути не поднимаются выше диагонали квадратной решётки [7-9].

Выпишем несколько первых чисел Шрёдера:

1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, … .

Приведем другую интерпретацию чисел Шрёдера.

Числа Шрёдера равны количеству способов разрезания данного прямоугольника на $n+1$ меньших прямоугольников с помощью n разрезов. Эти разрезы проводятся через заданные n точек внутри прямоугольника, никакие две из которых не лежат на одной прямой, параллельной сторонам прямоугольника, при этом каждый разрез проходит через одну из этих точек и делит только один прямоугольник на два.

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Шрёдера, найдем сначала *рекуррентное соотношение* для этих чисел:

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k}.$$

Будем искать производящую функцию в виде $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$. Решая предыдущее соотношение, находим производящую функцию для чисел Шрёдера

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1-6x-x^2}}{2x}.$$

Известна явная формула для вычисления чисел Шрёдера:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k C_{n+k}^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} C_k.$$

1.4. Числа Деланноя

Числа Деланноя описывают количество путей из левого нижнего угла прямоугольной решётки (0,0) к (n, m), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1). Такой путь иногда называют маршрутом (ограниченного) короля.

Для квадратной сетки $n \times n$ первые числа Деланноя (начиная с $n = 0$) последовательности выглядят так:

1, 3, 13, 63, 321, 1683, 8989, … .

Числа Деланноя удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$D(m,n) = D(m-1,n) + D(m-1,n-1) + D(m,n-1),$$

в качестве начальных условий можно принять $D(0,k) = D(k,0) = 1$.

Производящая функция для последовательности $D(m,n)$

$$G(x,y) = \sum_{m,n \geq 0} D(m,n)\, x^m y^n = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

2. Перечисление путей на решетках

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с перечислением путей на решетках. Как уже отмечено ранее, такие пути на решетках определяются через начальную точку, задающую координаты начала пути и последовательность точек целочисленной решетки плоскости с некоторыми правилами, задающими отношения между каждой парой соседних точек. Иначе говоря, рассматривается последовательность шагов, связанных с путем, причем под шагом понимается упорядоченная пара чисел, показывающая взаимное расположение соседних точек пути. Далее в каждом пункте рассматривается конкретные типы путей на решетках [4-6].

2.1. Пути Мак-Магона

Пусть $v_0, \dots, v_n -$ такая последовательность точек из Z^2, что:

1) $v_0 \ = \ (0, j_0)$;
2) v_{k+1} - $v_k \ = \ (1, 0)$ или $(0, -1), 0 \leq k \leq l$;
3) $alt(v_k) \geq 0, 0 \leq k \leq l, \ alt(v_k)$ – высота точки v_k.

Тогда $v_0, \dots, v_n$ называется *путем без уровней с началом* v_0 и *концом* v_n и обозначается $v =< v_0, \dots, v_n >_{j_0}$.

Пусть $M_{i,j}$ множество всех путей v, у которых $alt(v_0) = i$, $alt(v_n) = j$ и $i \geq alt(p) \geq j$ для $\forall p \in v$.
Множество $M_{k,0}$ будем называть множеством *путей Мак-Магона* [7 - 9].

2.2. Пути Моцкина

Пути Моцкина – это пути из точки (0, 0) в точку (n, 0), состоящие из шагов (1, 1), (1, 0) и (1, −1) и не опускающиеся ниже прямой y = 0. Количество таких путей называется $n-$м числом Моцкина [3, 5, 11].

Пусть $u = (i, j) \in Z^2$. Тогда j называется высотой точки u и обозначается $j = alt(u)$.

Пусть $u_0, \dots, u_l -$ такая последовательность точек из Z^2, что:

1) $u_0 \ = \ (0, j_0)$;
2) $u_{k+1} = u_k + (1, \sigma_k), \sigma_k \in \{-1,0,1\}, 0 \leq k \leq l$;
3) $alt(v_k) \geq 0, 0 \leq k \leq l$.

Тогда $u_0, \dots, u_l$ называется *путем без уровней с началом* u_0 и *концом* u_l и обозначается $(\sigma_0 \dots \sigma_{l-1})_{j_0}$.

Высотой пути $(\sigma_0 \dots \sigma_{l-1})_{j_0}$называется $\max alt(u_k)\,, 0 \leq k \leq l$.

Если $r \in \{-1,0,1\}$, то $(r)_j$ называется *шагом* на высоте j, который мы будем считать *спадом*, *уровнем* или *подъемом*, если r равно $-1{,}0$ или 1 соответственно. Таким образом, путь есть последовательность шагов, причем конец одного шага является началом следующего и высоты всех точек неотрицательны.

Пусть $H_i -$ множество всех путей σ, у которых $alt(u_0) = alt(u_l) = i$ и $alt(p) \geq i$ для $\forall p \in \sigma$.

Множество H_0 будем называть *множеством путей Моцкина*.

Рассмотрим бесконечную нижнюю треугольную матрицу $M = \|m_{n,k}\|$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$, где $m_{n,k}$ − число путей $(\sigma_0 \dots \sigma_n) \in H_0$ с k уровнями.
Значения чисел $m_{n,k}$ для $1 \leq n \leq 8$ приведены в таблице 1.
Таблица 1. Числа $m_{n,k}$

$m_{n,k}$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 0$	1								
1	0	1							
2	1	0	1						
3	0	3	0	1					
4	2	0	6	0	1				
5	0	10	0	10	0	1			
6	5	0	30	0	15	0	1		
7	0	35	0	70	0	21	0	1	
8	14	0	140	0	140	0	28	0	1

Для чисел $m_{n,k}, 0 \leq k \leq n, n \geq 0$ справедливо соотношение:

$$m_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{2}{n-k+2}\begin{pmatrix} n \\ k, \dfrac{n-k}{2} \end{pmatrix}, n-k \equiv 0 (mod\ 2); \\ \qquad 0, \qquad\qquad n-k \equiv 1 (mod\ 2), \end{cases}$$

где $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$ − триномиальные коэффициенты.

2.3. Пути Дика

Пути Дика — это пути из точки (0, 0) в точку ($2n$, 0), состоящие из шагов (1, 1) и (1, −1) и не опускающиеся ниже прямой y = 0.

Рассмотрим пути Моцкина H_0, определённые в 3.2. Определим оценку пути Моцкина следующим образом:

- оценка элементарного шага $(r)_k$ не зависит от уровня точки отсчёта и раина 1, если $r = 1$;
- оценка элементарного шага $(r)_k$ равна b_k, если $r = 0$ и λ_k если $r = -1$.

Значение (или вес) $V(\sigma)$ пути σ есть произведение значений элементарных шагов его составляющих. Рассмотрим последовательность:

$$\{U_n\}_{n \geq 0}: U_n = \sum_{|\sigma|=n} V(\sigma),$$

где суммирование ведется по всем путям Моцкина H_0 длинны n.

Утверждение 1. Последовательность $\{U_n\}_{n \geq 0}$, равна последовательности:

1. $\{R_n\}_{n \geq 0}$, при $b_k = 0, \lambda_{2k+2} = 1$ и $\lambda_{2k+1} = 2$;
2. $\{S_{n+1}\}_{n \geq 0}$, при $b_0 = 1, b_k = 3,\ \lambda_{k+1} = 2, k \geq 0$, где $2S_{n+1} = R_{n+1}$;
3. $\{S_n\}_{n \geq 0}$, при $b_0 = 1, b_k = 3,\ \lambda_k = 2, k \geq 0$.

Определим путь Дика как путь Моцкина с оценками $b_k = 0$ и $\lambda_k = 1, k \geq 0$.

Важная интерпретация чисел Каталана связана с путями Дика на плоскости.

Известно, что число путей Дика, состоящих из $2n$ звеньев, равно n −му числу Каталана C_n.

Введем в рассмотрение числа $C(n,k)$ − число путей Дика, состоящих из $2n$ звеньев k из которых есть подъемы, выходящих из начала координат.

Числа $C(n,k) = \frac{k}{n-k}\binom{2n-k-1}{n}, n \geq k+1, k \geq 1$, совпадают с обобщенными числами Каталана.

2.4. Пути Шрёдера

Пусть $v_0, \dots, v_n -$ такая последовательность точек из Z^2, что:

1) $v_0 = (0,0), v_n = (n,n)$;
2) $v_{k+1} - v_k = (1,0)$ или $(1,1)$ или $(0,1), 0 \leq k \leq l$;
3) $alt(v_k) \geq 0, 0 \leq k \leq m,\ alt(v_k)$ – высота точки v_k.
4) $alt(v_k) \leq a_{i,j}$, при $i = j$; $k = \overline{1,n}$,

Тогда $v_0, \dots, v_n$ называется *путем без уровней с началом* v_0 и *концом* v_n и обозначается $v =< v_0, \dots, v_n >_0$.

Пусть $R_{i,j} -$ множество всех путей v, у которых у которых $alt(v_0) = i$, $alt(v_n) = j$ и $i \geq alt(p) \geq j$ для $\forall p \in v$.

Множество $R_{n,0}$ будем называть множеством *путей Шрёдера*.

Числа Шрёдера также считают количество путей из точки $(0,0)$ в $(2n,0)$, использующих только шаги вправо-вверх или вправо-вниз (шаги $(1,1)$ или $(1,-1)$) или двойные шаги вправо $(2,0)$, которые не опускаются ниже оси x. Пусть $n -$ целое неотрицательное число [10-12].

Будем называть путь Шредера *малым*, если он пересекается с осью абсцисс лишь в конечном числе точек (иначе говоря, у него нет горизонтальных звеньев, проходящих на высоте 0). Число малых путей Шредера из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ будем обозначать через s_n; это число называется n-м *малым числом Шредера*.

При $n > 0$ число малых путей Шредера вдвое меньше общего числа путей Шредера: $R_n = 2s_n$.

2.5. Пути Деланноя

Пусть $v_0, \dots, v_n -$ такая последовательность точек из Z^2, что:

1) $v_0 = (0,0), v_n = (n,n)$;
2) $v_{k+1} - v_k = (1,0)$ или $(1,1)$ или $(0,1), 0 \leq k \leq l$;
3) $alt(v_k) \geq 0, 0 \leq k \leq m,\ alt(v_k)$ – высота точки v_k.

Пусть $D_{i,j} -$ множество всех путей v, у которых у которых $alt(v_0) = i$, $alt(v_n) = j$ и $i \geq alt(p) \geq j$ для $\forall p \in v$.

Множество $D_{n,0}$ будем называть множеством *путей Деланноя* на решетке размерности $n \times n$.

Список литературы

[1] Кузьмин О. В., Лобах М. В. Комбинаторные числа и структуры решеток // Комбинаторные и вероятностные задачи дискретной математики: сб. науч. тр. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2006. - С. 94-103

[2] Спивак А. Числа Каталана. // Квант. 2004. – №3. – С. 2-10

[3] Тюрнева Т. Г. Перечисление путей Моцкина // Комбинаторные числа и структуры решеток // Комбинаторные и вероятностные задачи дискретной математики: сб. науч. тр. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2006 – С.123-130

[4] Балагура А. А. О перечислении решетчатых путей и корневых деревьев // Комбинаторные и вероятностные проблемы дискретной математики: сб. науч. тр. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2010 – С. 3-13

[5] Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 294 с.

[6] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. — 3-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.

[7] Тюрнева Т. Г. Некоторые свойства и перечислительные интерпретации чисел Шрёдера R_n // Комбинаторные и вероятностные проблемы дискретной математики: сб. науч. тр. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2010 – С. 131-140

[8] Кузьмин О.В., Тюрнева Т.Г. Числа Шредера, их обобщения и приложения // Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. — Иркутск: Иркут. ун-т, 1997. С. 117-125.

[9] Соловьева Л. А. Комбинаторные числа и взвешенные траектории на решетках Дис. … канд. физ.- мат. наук : 01.01.09 / Соловьева Л. А. / Иркутск, 2007. – 130 с.

[10] Тюрнева Т. Г. Комбинаторные методы перечисления плоских корневых деревьев и путей на решетках Дис. … канд. физ.- мат. наук : 01.01.09 / Тюрнева Т. Г. / Иркутск, 2004. – 87 с.

[11] Кузьмин О.В., Тюрнева Т.Г. Пути на решётках и некоторые специальные числа // Тр. Вост.-Сиб. зональной межвузовской конф. по математике и проблемам её преподавания в вузе. Иркутск: Изд-во Иркут. пед. ун-та, 1999. -С.159-160.

[12] Смирнов Е. Ю. Три взгляда на ацтекский бриллиант. Записки миникурса, прочитанного на XIV летней школе «Современная математика», Дубна, 2014 г. – 43 с.