УДК 519.119

Потехина Елена Алексеевна,
канд. физ.-мат. наук, Военный ордена Жукова
университет радиоэлектроники, г. Череповец

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОМПОЗИЦИИ АДАМАРА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация: В статье анализируются существующие методы вычисления композиции Адамара степенных рядов рациональных функций.

Ключевые слова: композиция Адамара, производящие функции, рациональные степенные ряды.

Композиция Адамара степенных рядов рациональных функций находит применение при решении ряда задач комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей.

Помимо задач перечислительной комбинаторики и дискретной теории вероятностей в научной литературе можно встретить применения произведения Адамара в задачах комплексного анализа ([1], [4], [8]), линейного программирования [16], математической физики ([14], [19]). В книге [2] Л. Бибербаха изложены глубокие результаты по изучению свойств произведения Адамара (там же приведена обширная библиография). Свойства произведения Адамара исследованы также в работах В.И. Горбайчука и В.И. Кузьмича [3], К.Н. Бояджиева [15]. Привлекают внимание исследователей и свойства произведения Адамара нескольких функций [17]. Результаты исследования многомерного произведения Адамара представлены в работах Л.А. Айзенберга [1], М.М. Елина [4], В.П. Кривоколеско [5], К.В. Сафонова [12]. Вопрос о рациональности произведения Адамара рациональных функций нескольких переменных исследовал Е.К. Лейнартас ([6] – [8]).

Композицией Адамара формальных степенных рядов $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x)*H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$.

Один из методов вычисления композиции Адамара степенных рядов рациональных функций связан с применением следующего свойства композиции Адамара:

$$G(x)*\frac{1}{1-qx}=\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k\right)*\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k x^k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} g_k q^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty} g_k (qx)^k=G(qx).$$

Однако этот метод можно применять только в том случае, когда удается найти корни знаменателя одной из рациональных функций, для которых требуется вычислить композицию Адамара. При этом используется разложение на простейшие дроби.

Композиция Адамара тесно связана с Ω-оператором П.А. Мак-Магона, введенном им в комбинаторной теории разбиений целых чисел (см. [11, с. 84]). Ω-оператор Мак-Магона для ряда от одной переменной λ определяется следующим образом:

$$\Omega_{\geq} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \lambda^k=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Связь Ω-оператора Мак-Магона с композицией Адамара может быть выражена следующим соотношением:

$$G(x)*H(x)=\Omega_{\geq}\left[\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)G\left(\frac{1}{\lambda}\right)H(\lambda x)\right].$$

Таким образом, вычисление композиции Адамара может быть сведено к вычислению Ω-оператора Мак-Магона. Справедливо и обратное утверждение, иллюстрацией к которому может служить лемма 5 в работе [10]. Вычисление Ω-оператора Мак-Магона представляет интерес в связи с рядом комбинаторных задач, которые могут быть решены с его привлечением. Много таких задач рассмотрено в серии работ Г. Эндрюса с соавторами, подробный список которых представлен в [18]. В этих работах активно используются системы компьютерной алгебры, поскольку объем вычислений слишком велик, чтобы выполнить их вручную.

Работа [18] посвящена построению алгоритма вычисления Ω-оператора Мак-Магона для случая рациональных функций. В силу отмеченного выше, этот алгоритм может быть использован для вычисления композиции Адамара, и обратно. Алгоритм использует разложение рациональных функций на простейшие дроби и технику симметрических функций для отыскания Ω-оператора Мак-Магона от произведений простейших дробей. При этом используется алгебраическая замкнутость поля коэффициентов.

М.И. Толовиковым ([13], [10]) предложен алгебраический метод, дающий формулы для композиций Адамара рациональных функций вида

$$\frac{1}{1-d_1x-d_2x^2-\ldots-d_nx^n} * \frac{x^k}{1-b_1x-b_2x^2-\ldots-b_mx^m}$$

($m,\ n,\ k\ \in\mathbb{Z},\ \ m\geq 2,\ \ n\geq 2,\ \ 0\leq k<m$). Алгебраический метод позволяет представить композицию Адамара рациональных функций в виде отношения определителей, элементы которых зависят от коэффициентов числителя и знаменателя дробей, задающих эти функции. Вывод формул использует комбинаторную технику, и поэтому не зависит от алгебраических свойств поля коэффициентов. Алгебраический метод требует вычисления определителей порядка $m + n$.

Комбинаторно-алгебраический метод, предложенный в [9], позволяет решить рассмотренную выше задачу посредством вычисления определителей порядка $\min(m, n)$. Порядок определителей автором снижен до величины $\min(m, n)$ с помощью методов комбинаторного анализа и линейной алгебры.

Таким образом, комбинаторно-алгебраический метод вычисления композиций Адамара рациональных функций расширяет возможности применения композиции Адамара для получения решения конкретных задач в явном виде, поскольку в этом случае порядок определителей от величины

$\max(m, n)$ не зависит, он равен произвольному, но фиксированному числу $\min(m, n)$.

Список литературы:

1. Айзенберг Л. А., Лейнартас Е. К. Многомерная композиция Адамара и ядра Сеге // Сибирский математический журнал. 1983. Т. 24, №3. С. 3-10.

2. Бибербах Л. Аналитическое продолжение: Пер. с нем. М.: Наука, 1967. 240 с.

3. Горбайчук В. И., Кузьмич В. И. О некоторых свойствах адамаровских композиций регулярных в круге функций // Украинский математический журнал. 1975. Т. 27, №1. С. 74-81.

4. Елин М. М. Многомерная композиция Адамара // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, №5. С. 1052-1057.

5. Кривоколеско В. П., Лейнартас Е. К. О тождествах с полиномиальными коэффициентами // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2012. Т. 5, №3. С. 56-62.

6. Лейнартас Е. К. Интегральные методы в многомерной теории степенных рядов и разностных уравнений: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01. Красноярск, 2006. 32 с.

7. Лейнартас Е. К. Когомологии рациональных форм и многомерные аналоги композиции Адамара: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Свердловск, 1982. 14 с.

8. Лейнартас Е. К. Об одном обобщении произведения Адамара в C^n // Математические заметки. 1982. Т. 32, №4. С. 477-482.

9. Потехина Е. А. Приложение произведения Адамара к некоторым комбинаторным и вероятностным задачам // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 1. С. 101-112.

10. Потехина Е. А., Толовиков М. И. Осциллирующее случайное блуждание и произведение Адамара рациональных функций // Дискретная математика. 2013. Т. 25, вып. 3. С. 96-115.

11. Рыбников К. А. Комбинаторный анализ. Очерки истории. М.: Изд-во Механико-математического факультета МГУ, 1996. 125 с.

12. Сафонов К. В. Об условиях алгебраичности и композиции Адамара кратных степенных рядов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Свердловск, 1986. 16 с.

13. Толовиков М. И. Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, вып. 3. С. 505-506.

14. Bostan A., Boukraa S., Christol G., Hassani S., Maillard J-M. Ising n-fold integrals as diagonals of rational functions and integrality of series expansions // Journal Of Physics A: Mathematical And Theoretical. 2013. V. 46, num. 18, 185201.

15. Boyadzhiev K. N. Series transformation formulas of Euler type , Hadamard product of series, and harmonic number identities //Indian J. Pure Appl. Math. 2011 V. 42, num. 5. P. 371-386.

16. De Loera J. A., Haws D., Hemmecke R., Yoshida R. A computational study of integer programming algorithms based on Barvinok's rational functions // Discrete Optimization. 2005. V. 2, num. 2. P. 135–144.

17. El-Ashwah R. M., Aouf M. K. The Hadamard product of meromorphic univalent functions defined by using convolution // Applied Mathematics Letters. 2011. V. 24. P. 2153–2157.

18. Han G.-N. A general algorithm for the MacMahon omega operator // Annals of Combinatorics. 2003. V. 7, num. 4. P. 467-480.

19. Zhilinskii B. Generating functions for effective Hamiltonians via the symmetrized Hadamard product // Journal Of Physics A: Mathematical And Theoretical. 2008. V. 41, num. 38, 382004.