УДК 519.119

Потехина Елена Алексеевна,
канд. физ.-мат. наук, Военный ордена Жукова
университет радиоэлектроники, г. Череповец

КОМПОЗИЦИЯ АДАМАРА В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

Аннотация: В статье рассматриваются особенности применения композиции Адамара в задаче распределения ресурсов вычислительной сети.

Ключевые слова: композиция Адамара, производящие функции, рациональные степенные ряды, распределение ресурсов вычислительной сети.

Композицией Адамара формальных степенных рядов $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x)*H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$.

Композиция Адамара степенных рядов рациональных функций находит применение при решении ряда задач комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей.

Рассмотрим задачу полного покрытия прямоугольника в динамике. Будем укладывать прямоугольник размера $k\times n$ прямоугольниками размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, имеющими соответственно вероятности выпадения для первого ряда – $q_{11}, q_{12}, q_{13},\ldots$, для второго ряда – $q_{21}, q_{22}, q_{23},\ldots$, соответственно, и т.д., для k-го ряда – $q_{k1}, q_{k2}, q_{k3},\ldots$, соответственно.

Укладка прямоугольников начинается с первого ряда и выполняется по следующему алгоритму. Каждый новый прямоугольник укладывается в тот ряд, который в данный момент имеет наименьшую длину. Если несколько рядов прямоугольников имеют одинаковую длину, и она является наименьшей, то укладка выполняется в ряд с наименьшим номером. Таким образом, чередуя укладку рядов, заполняем весь прямоугольник.

Пусть $\left(X_{1j}\right)_{j=1}^{\infty}$, $\left(X_{2j}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(X_{kj}\right)_{j=1}^{\infty}$ – не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения,

$$f_i(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(X_{ij}=j\right)x^j=\sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}\,x^j,\ \ (i=1,2,...,k),$$

причем q_{ij} – вероятность того, что прямоугольник i-го ряда будет иметь длину j.

Рассмотрим производящую функцию

$$F_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p_{k,n,m}\,x^n t^m,$$

где $p_{k,n,m}$ – вероятность того, что в случайном процессе на каком-то шаге появится прямоугольник размера $k\times n$, состоящий из m покрывающих элементов.

Справедлива следующая теорема, сформулированная и доказанная автором в [1].

Т е о р е м а 1. В принятых выше обозначениях справедливо равенство:

$$F_k(x,t)=\frac{1}{1-f_1(x)t}*\frac{1}{1-f_2(x)t}*\ldots*\frac{1}{1-f_k(x)t}.$$

Т е о р е м а 2. Пусть $\left(X_{1j}\right)_{j=1}^{\infty}$, $\left(X_{2j}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(X_{kj}\right)_{j=1}^{\infty}$ – не зависящие друг от друга последовательности независимых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, имеющих равномерное распределение и соответствующие производящие функции

$$f_i(x)=\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1}x^j.$$

Тогда при s = 2 в принятых выше обозначениях справедливо равенство:

$$F_k(x,t)=\frac{2^k}{(2-t)^k}\frac{1}{1-t^k(2-t)^{-k}x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 справедливо равенство

$$F_k(x,t)=\frac{1}{1-f_1(x)t}*\frac{1}{1-f_2(x)t}*\ldots*\frac{1}{1-f_k(x)t}.$$

Для вычисления композиции Адамара каждый множитель приводим к виду:

$$\frac{1}{1-f_i(x)t}=\frac{2}{2-t}\frac{1}{1-t(2-t)^{-1}x}.$$

Воспользовавшись свойством линейности композиции Адамара:

$$(\alpha G(x))*(\beta H(x))=\left(\alpha\sum_{k=0}^{\infty}g_kx^k\right)*\left(\beta\sum_{k=0}^{\infty}h_kx^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha g_kx^k\right)*\left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta h_kx^k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha g_k)(\beta h_k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha\beta(g_kh_k)x^k=\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}g_kh_kx^k=\alpha\beta(G(x)*H(x)),$$

находим

$$F_k(x,t)=\frac{2^k}{(2-t)^k}\frac{1}{1-t(2-t)^{-1}x}*\frac{1}{1-t(2-t)^{-1}x}*\ldots*\frac{1}{1-t(2-t)^{-1}x},$$

где композиция Адамара одинаковых производящих функций вычисляется k раз. Применим к последнему равенству $k-1$ раз следующее свойство композиции Адамара:

$$G(x)*\frac{1}{1-qx}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}g_kx^k\right)*\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^kx^k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}g_kq^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(qx)^k=G(qx),$$

откуда получаем требуемое.

Теорема 2 доказана.

Информация о вероятности $p_{k,n,m}$ может быть использована при разработке алгоритмов распределения ресурсов в вычислительных сетях [2]. Под покрывающими прямоугольниками будем понимать задачи, поступающие в вычислительную сеть, под длиной покрывающего прямоугольника – время, необходимое для решения данной задачи, под рядом прямоугольников – последовательность задач, направляемых управляющим узлом сети конкретному вычислительному узлу. Тогда $p_{k,n,m}$ – вероятность того, что k

вычислительных узлов за время n завершат выполнение m текущих задач. Теорема 2 позволяет рассчитать вероятности $p_{k,n,m}$ для случая, когда распределение вероятностей того, что задача, направляемая конкретному вычислительному узлу, будет решена за фиксированное время, равномерно.

Список литературы:

1. Потехина Е.А. Приложение произведения Адамара к некоторым комбинаторным и вероятностным задачам // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 1. С. 101-112.
2. Жук С.Н. Об онлайн-алгоритмах упаковки прямоугольников в несколько полос // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 4. С. 117-131.