О нормальном распределении в бесконечномерных пространствах

Т. А. Ширяева[1,2], А.К.Шлепкин[1]

[1]Сибирский университет науки и технологтй им. М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. Красноярский рабочий , 31
*ak_kgau@mail.ru

[2]Красноярский государственный аграрный университет
Российская Федерация, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 90
*tas_sfu@mail.ru.

Аннотация. Рассматриваются верхние оценки вероятности попадания в заданную область нормальной бесконечномерной случайной величины. Приводятся численные значения оценок рассматриваемых вероятностей.

Ключевые слова: вероятность, бесконечномерное пространство, численная оценка.

Одномерное нормальное распределение однозначно задается своими 2-мя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией. Зная эти параметры, легко можно найти вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в любой интервал. Эта легкость нахождения вероятности попадания в заданную область заканчивается даже для двумерной нормальной случайной величины, потому что требуется знание уже 5 параметров: 2-х математических ожиданий, 2-х дисперсий и коэффициента корреляции, а области попадания могут быть весьма причудливой формы, и без применения приближенных методов вычисления уже не обойтись (см. [1]), хотя и в одномерном случае они используются, так как плотность нормального распределения не интегрируется в элементарных функциях. Если же рассматривать $n-$ мерное нормальное распределение, то кроме знания

$$\frac{1}{2}(3n+n^2)$$

параметров еще требуется для существования плотности распределения и невырожденность ковариционной матрицы. Тем не менее, если все эти условия выполнены, то используя приближенные методы вычислений, можно найти окончательное значение вероятности попадания в указанную область в виде числа, что является нередко, вообще говоря, одной из основных задач математического исследования.

Как только мы переходим к бесконечномерным случайным величинам, то получение численных оценок вероятностей становится совсем затруднительным (хотя можно утверждать, что и без чисел жить хорошо). В данной заметке приводится верхняя оценка вероятности попадания в заданную область нормальной бесконечномерной нормальной величины, которая может быть численной.

Основные определения и известные результаты

Пусть

$$(\Omega, A, P) -$$

некоторое вероятностное пространство. $H -$ вещественное гильбертово пространство, $\beta -$ некоторая $\sigma -$алгебра подмножеств H.

Определение [2]. Измеримое отображение

$$\theta : \Omega \rightarrow H$$

называется гильбертовозначной случайной величиной (случайным элементом) в (H, β).

Определение [2]. Вероятностным распределением гильбертовозначной случайной величины θ называют меру на (H, β), определенную формулой

$$\mu(A) = P(\omega \epsilon \Omega : \theta(\omega) \epsilon A)$$

для любого $A \epsilon \beta$.

Определение [2]. Если $f -$ некоторый функционал, определенный на H, $x -$ вещественное число ($x \epsilon R$), то закон распределения θ задается следующим образом

$$F_\theta(f_x) = P\big(\omega \epsilon \Omega : f\big(\theta(\omega)\big) < x\big).$$

Если $f(x) = \|x\| -$ норма в гильбертовом пространстве H, то

$$F_\theta(x) = P(\omega \in \Omega: \ \|\theta(\omega)\| < x).$$

Известно[6], что норма в гильбертовом пространстве может быть задана с помощью скалярного произведения:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

где (x, y) – скалярное произведение $x \in H$ и $y \in H$.

Определение [2]. Гильбертовозначная случайная величина θ называется нормально распределенной (гауссовой), если для любого непрерывного функционала f вещественная случайная величина $f(\theta)$ имеет нормальное распределение.

Для бесконечномерных случайных величин также задают моментные характеристики, которые называют моментными формами.

Определение [3]. Моментной формой порядка k меры μ называется соотношение

$$m_k = \int (x, z_1) \cdots (x, z_m) \mu(dx)$$

Если форма $m_1(z)$определена, то она является непрерывным линейным функционалом относительно z. Следовательно, по теореме Рисса об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве [6], существует такой элемент a в H, что

$$m_1(z) = \int (x, z)\, \mu(dx) = (a, z).$$

Элемент a называют математическим ожиданием случайной величины θ.

Если определена форма

$$m_2(z_1, z_2),$$

то выражение

$$m_2(z_1, z_2) - m_1(z_1) m_1(z_2)$$

будет непрерывным симметричным билинейным функционалом. Следовательно, существует такой симметричный ограниченный линейный оператор $B,$ что

$$m_2(z_1, z_2) - m_1(z_1)m_1(z_2) = (Bz_1, z_2).$$

Этот оператор называется корреляционным оператором случайного элемента $\theta.$ Оператор B является неотрицательным. Известно [3], что нормальное распределение в гильбертовом пространстве однозначно задается характеристическим функционалом вида

$$\varphi(z) = \exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Bz, z)\right\},$$

где $i = \sqrt{-1},\ z \in H.$ Таким образом, нормальное распределение в гильбертовом пространстве определено, если известны $a, B.$

Численные оценки вероятности попадания нормальной случайной величины в заданную область

Если задано гильбертово пространство $H,$ то, очевидно, можно задавать в нем множества с помощью нормы. Пусть $a = 0,$ что не уменьшает общности. Известна [7] оценка сверху вероятности попадания нормальной случайной величины в область вида $-\{x : \|x\| < r\}$:

$$P(\|\theta\|_H < r) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{r^2}} \frac{1}{t\sqrt[4]{1 + (2t\gamma)^2}} \sin\left(\frac{tr^2}{2}\right) dt,$$

где $\gamma -$ максимальное собственное значение ковариационного оператора нормальной случайной величины $\theta, r \geq 0.$

Известно[6], что если оператор Bявляется ограниченным симметричным неотрицательным линейным оператором, то B имеет только действительные неотрицательные значения [5]. Максимальное собственное значение γ равно норме оператора $B.$ Рассмотрим некоторые примеры гильбертовых пространств.

Пример 1. Пусть имеется пространство $l_2,$ оператор B вида

$$\forall\, x \in l_2, \qquad x = (x_1 x_2 x_3 \cdots), \qquad Bx = (0, x_2 x_3 \cdots)\,.$$

Данный оператор не является ковариационным, так как нарушено условие симметричности:

$$(Ax, y) \neq (x, Ay),$$

что легко проверяется $\forall\, x, y \in l_2$.

Пример 2. В l_2, задан оператор B пакой, что

$$Bx = (\frac{x_1}{2}, \frac{2x_2}{3}, \cdots, \frac{kx_k}{k+1} \cdots, \cdots).$$

Можно проверить, что этот линейный оператор симметричный неотрицательный. Но B не является вполне непрерывным оператором, так как мультипликативный оператор в l_2

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots \alpha_\alpha x_k, \cdots$$

вполне непрерывен тогда и только тогда, когда $\alpha_k \to 0$ (см. [4]) при $k \to \infty$. У данного оператора $\alpha_k \to 1$, поэтому он не может вполне непрерывным.

Пример 3. Пусть в пространстве $L_2[0, \pi]$ задан оператор Фредгольма

$$Bx(t) = \int_0^\pi \sin(t+s) x(s) ds,$$

где $x(t) \in L_2[0, \pi]$. Этот оператор удовлетворяет всем условиям корреляционного оператора в гильбертовом пространстве $H = L_2[0, \pi]$. Проведя соответствующие вычисления, можно найти его максимальное собственное значение, оно равно $\frac{\pi}{2}$.

Если теперь задать область, которая интересует исследователя, то можно численно оценить вероятность попадания в нее нормальной случайной величины. Приведем здесь некоторые численные оценки:

$$1. P\left(\|\theta\|_{L_2[0,\pi]} \leq 1\right) \leq 0{,}4093;$$

$$2. P\left(\|\theta\|_{L_2[0,\pi]} \leq 2\right) \leq 0{,}63386;$$

$$3. P\left(\|\theta\|_{L_2[0,\pi]} \leq 3\right) \leq 0{,}7471.$$

Заключение

В данной заметке рассмотрены численные значения только верхних оценок. Относительно нижних оценок пока ничего неизвестно. Если же рассматривать банаховы пространства, где есть просто норма и нет скалярного произведения, то численных оценок вероятностей для нормальных величин в публикациях не встречалось. Эта задача очень сложная, и с какой стороны к ней подступиться – не ясно.

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М. Высшая школа. 1999.
2. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М. Мир. 1965.
3. Гихман И.И. Скороход А.Р. Теория случайных процессов. Т. 1. М., Наука, 1971.
4. Люлько Н.А. , Максимова О.Д. Функциональный анализ. Теоремы и задачи. Новосибирск. Изд-во НГУ, 2017.
5. Коллац А. Функциональный анализ и вычислительная математика. М. Мир, 1969.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.
7. Ширяева Т.А. О некоторых верхних вероятностных оценках в теории надежности вычислительных систем. Кандидатская диссертация. Красноярск., 2002.

Ширяева Тамара Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент; Сибирский университет науки и технологий им. М.Ф. Решетнева, Красноярский государственный аграрный университет.

tas_sfu@mail.ru.

Шлепкин Анатолий Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский университет науки и технологий им. М.Ф. Решетнева.

ak_kgau@mail.ru.