УДК 514.14

О различных подходах к решению геометрических задач

Л.А. Осипенко [1]

Аннотация. Рассматривается роль геометрических преобразований в общем определении геометрии. На примере доказательства Леммы о трапеции показывается, как трактуется и доказывается одно и то же свойство в различных геометриях.

Ключевые слова: геометрия преобразований, преобразования плоскости, группа преобразований, Лемма о трапеции.

On various approaches to solving geometric problems

L.A. Osipenko

Abstract.The role of geometric transformations in the general definition of geometry is considered. Using the example of the proof of the Trapezoid Lemma, we show how the same property is interpreted and proven in different geometries.

Keywords: geometry of transformations, transformations of the plane, group of transformations, Lemma on the trapezoid.

В школьных программах учебного предмета «Геометрия» понятию геометрического преобразования отводится достаточно скромное место. Вместе с тем, традиционный аксиоматический подход к изучению предмета, увлечение аналитическими методами зачастую скрывают геометрическую суть задачи, приводят к формальному характеру знаний. Напротив, изучение геометрических преобразований способствует формированию пространственного, геометрического мышления.

С понятием преобразования связан групповой подход к геометрии, изложенный немецким математиком Ф. Клейном в лекции «Сравнительное

---

[1] Осипенко Лариса Анатольевна, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики ИМИТ ИГУ, кандидат физико-математических наук.

обозрение новейших геометрических исследований» в 1872 году (Эрлангенская программа), в соответствии с которым геометрия изучает свойства фигур, являющиеся инвариантами некоторой группы преобразований. Такой подход зачастую позволяет взглянуть на одну и ту же задачу с точки зрения разных геометрий. Решение одной и той же задачи различными методами, с одной стороны, дает возможность полнее исследовать свойства геометрических фигур, с другой стороны, узнать специфику того или иного подхода к решению, его преимущества и недостатки.

Одним из ярки примеров различного подхода к решению одной и той же задачи является доказательство Леммы о трапеции:

Утверждение (Лемма о трапеции). Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, точка пересечения ее диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

В школьном курсе планиметрии изучается евклидова геометрия, в которой, с точки зрения группового подхода, изучаются инварианты движений и подобий. Поэтому, для доказательства этого утверждения, рассматриваются, например, пары треугольников: $\Delta DSC \sim \Delta ASB$, $\Delta DPC \sim \Delta BPA$ (рис. 1). из подобия которых можно сделать вывод, что на прямой MN находятся также точки S и P.

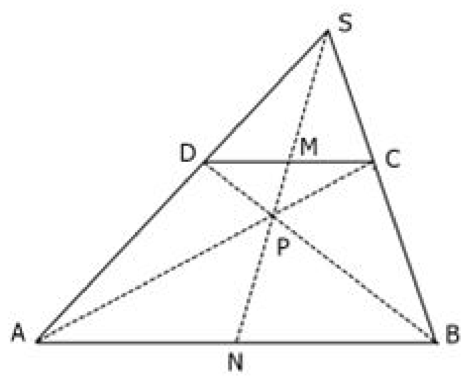

Рис. 1

Однако, если в качестве преобразования рассмотреть частный случай подобия – гомотетию, утверждение леммы станет более очевидным, а доказательство коротким. Одним из фундаментальных выводов при изучении инвариантов гомотетии является тот факт, что два параллельных отрезка AB и A_1B_1 гомотетичны дважды: одна из гомотетий задается парами точек $A \to A_1,\ B \to B_1$, а другая – парами точек $A \to B_1,\ B \to A_1$ (коэффициенты этих гомотетий – противоположные числа k и $-k$). Поэтому для доказательства Леммы достаточно рассмотреть гомотетию относительно точек P и S (рис. 1), при каждой из которых точка M переходит в точку N, то есть эти четыре точки лежат на одной прямой.

Обратимся теперь к аффинной геометрии. Как известно, инвариантами аффинных преобразований являются: коллинеарность точек (принадлежность точек одной прямой), параллельность прямых, отношение длин отрезков, лежащих на одной или параллельных прямых, отношение площадей фигур. Кроме того, справедливо утверждение: две трапеции аффинно-эквивалентны (синоним понятия равенства для инвариантов группы движений) тогда и только тогда, когда равны отношения оснований трапеций. Легко заметить, что Лемма о трапеции свободна от метрических понятий и, следовательно, носит аффинный характер и допускает решение так называемым аффинным методом. Можно доказать утверждение Леммы для трапеции, аффинно-эквивалентной данной, например, для равнобокой трапеции, основания которой равны основаниям данной трапеции.

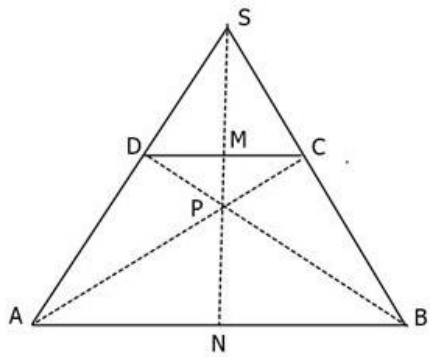

Рис. 2

Для такой трапеции прямая MN является осью симметрии (рис. 2), точки C и D, A и B соответствуют друг другу при этой симметрии, поэтому прямая AC переходит в прямую DB, а прямая BC – в прямую AD. Точки пересечения этих прямых – точки P и S соответственно – принадлежат оси симметрии MN.

И, наконец, с точки зрения проективной геометрии, совокупность четырех точек (вершин), никакие три из которых не лежат на одной прямой, и шести пар прямых (сторон), проходящих через каждую пару этих точек, называется полным четырехвершинником. При этом, три точки пересечения прямых, отличные от вершин, называются диагональными точками, а проходящие через каждые две диагональные точки три прямые – диагональными прямыми. Поэтому, с точки зрения проективной геометрии, трапеция – полный четырехвершинник с вершинами A, B, C и D, у которого одна диагональная точка является несобственной (прямые AB и CD «пересекаются» в бесконечно удаленной точке Q_∞, рис. 3). Согласно гармоническому свойству полного четырехвершинника, на каждой его стороне и на каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек. Для стороны, проходящей через вершины A и B трапеции, как полного четырехвершиника, это точки (A, B, N, Q_∞). А такая четверка, содержащая одну несобственную точку, является гармонической тогда и только тогда, когда точка, стоящая в паре с несобственной, является серединой отрезка, образованного двумя другими точками. То есть N – середина AB. Аналогично для четверки (D, C, M, Q_∞).

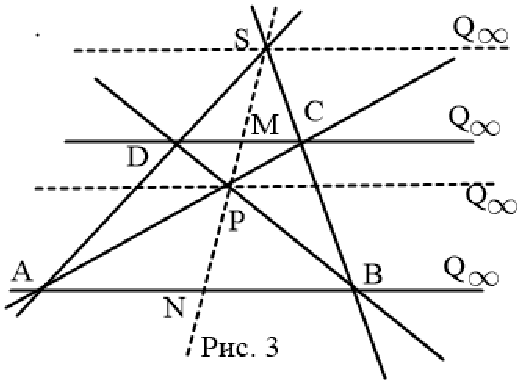

Рис. 3

На примере такого, не слишком сложного для доказательства в рамках евклидовой геометрии, утверждения, как Лемма о трапеции, мы смогли увидеть, как по-разному трактуется одно и то же свойство в различных геометриях. Большая общность геометрических преобразований позволяет значительно упростить доказательство многих теорем. Поэтому в процессе подготовки будущих учителей математики к преподаванию школьного курса геометрии изучение геометрических преобразований и знакомство с групповым подходом к геометрии играет важную роль, значительно повышает качество геометрических знаний и умений студентов.

Литература.

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т.- Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. - М.: МЦНМО, 2004.
2. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 т.- Т. 2. Геометрия. – М.: Наука.Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.