СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ НЕУБЫВАЮЩИХ КОРТЕЖЕЙ

А. А. Балагура

Рассматривается вспомогательная задача - подсчет мощности некоторого множества котрежей, которая возникла при нахождении перечислительной интерпретации расщепленных полиномов Платонова. Найденные формулы позволяют осуществить подсчет мощности искомого множества.

Ключевые слова: комбинаторный полином разбиений, корневое дерево, кортеж.

1 Введение

Наряду с такими универсальными объектами как деревья и перестановки важная роль в перечислении различных объектов принадлежит последовательностям и кортежам.
В первом параграфе рассматривается задача подсчета мощности множества котрежей, координаты которых неубывают. Приводятся необходимые понятия и определения, доказываются ряд утверждений. Во втором параграфе строится множество типов деревьев, подсчет мощности этого множества является обобщением четвертой задачи Шредера, и может быть осуществлен с помощью полученных формул.

2 Неубывающие кортежи

Кортежем длины n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $(i_1, ..., i_n)$.

Пусть $a_1, ..., a_n \in N, a_1 \leq ... \leq a_n$. Обозначим
$I(a_1, ..., a_n) = \{(i_1, ..., i_n)|\ i_j \leq a_j,\ i_j \leq i_{j+1},\ 1 \leq j \leq n\}$,
$X(a_1, ..., a_n) = |I(a_1, ..., a_n)|$.

Рассмотрим задачу нахождения $X(a_1, ..., a_n)$.

Утверждение 1. *Имеет место следующая формула*

$$X(k,n) = \frac{(2n-k+1)k}{2}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть (i_1, i_2) кортеж длины 2, $a_1 = k, a_2 = n$. Число кортежей у которых $i_1 = 1$ равно n, у которых $i_1 = 2$ — равно $n-1$ и так далее, у которых $i_1 = k$ равно — $n-k+1$.

Тогда $X(k,n) = n + (n-1) + ... + (n+1-k) = \frac{(2n-k+1)k}{2}$.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Имеет место следующее рекуррентное соотношение*

$$X(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{a_1-1} X(a_2 - i, ..., a_n - i). \quad (2)$$

Доказательство. Разобьем все множество I на подмножества $I_1, ...I_{a_1}$. В множество I_k включим все кортежи у которых $i_1 = k, 1 \le k \le a_1$. Тогда $|I_1| = X(a_2, ..., a_n)$. Далее поскольку каждый следующий член последовательности не меньше предыдущего, имеем: $|I_2| = X(a_2 - 1, ..., a_n - 1)$, $|I_{a_1}| = X(a_2 - (a_1 - 1), ..., a_n - (a_1 - 1))$.

Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Имеет место следующее рекуррентное соотношение*

$$X(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{a_{n-2}-1} f_{n-1,i} X(a_{n-1} - i, ..., a_n - i), \quad (3)$$

где $f_{3,a_1} = a_1, f_{i,a_{i-2}+1} = ... = f_{i,a_{i-1}} = f_{i,a_{i-2}}, i \ge 3$, для $a_{i-2} + 1 \le k \le a_{i-1}$ и $f_{n,k} = f_{n-1,k} + f_{n,k-1}$ для $0 \le k \le a_{n-2}$.

Доказательство. Будем последовательно применять формулу (1) до тех пор пока все слагаемые в правой части не будут числами некоторого множества кортежей длины 2. Применим формулу (2) к каждому слагаемому в правой части формулы (2), получим:

$$X(a_1, ..., a_n) = X(a_3, ..., a_n) + 2X(a_3 - 1, ..., a_n - 1) + 3X(a_3 - 2, ..., a_n - 2) + ...$$

$$... + a_1 X(a_3 - a_1 + 1, ..., a_n - a_1 + 1) + ... + a_1 X(a_3 - a_2 + 1, ..., a_n - a_2 + 1). \quad (4)$$

Далее, действуя аналогично, применим (2) к каждому слагаемому в (4).

Обозначим $f_{m,k}$—коэффициент при $X(a_m - k, ..., a_n - k)$ в разложениях, $3 \leq m \leq n-1$. Тогда $f_{3,0} = 1, f_{3,1} = 2, f_{3,2} = 3, ..., f_{3,a_1-1} = a_1, ..., f_{3,a_2-1} = a_1$. Разложение (4) равно:

$$X(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{a_2-1} f_{3,i}\, X(a_3 - i, ..., a_n - i) = \sum_{i=0}^{a_3-1} f_{4,i}\, X(a_4 - i, ..., a_n - i) = ...$$

$$... = \sum_{i=0}^{a_{n-2}-1} f_{n-1,i}\, X(a_{n-1} - i, ..., a_n - i).$$

Найдем коэффициенты $f_{m,k}$ в разложении.

Заметим, что

$$X(a_k - i, ..., a_n - i) - X(a_k - (i+1), ..., a_n - (i+1)) = X(a_{k+1} - i, ..., a_n - i), \quad (5)$$

где $2 \leq k \leq n-1, 0 \leq i \leq a_k - 1$.

Заметим, что

$$X(a_k - i, ..., a_n - i) - X(a_k - (i+1), ..., a_n - (i+1)) = 0, \qquad (6)$$

где $a_k \leq k \leq n-1, 0 \leq i \leq a_k - 1$.

Согласно (5) имеем: $X(a_4, ..., a_n)$ встречается только в разложении $X(a_3, ..., a_n)$. Значит $f_{4,0} = 1$. $X(a_4 - 1, ..., a_n - 1)$ встречается только в разложениях $X(a_3, ..., a_n)$ и $X(a_3 - 1, ..., a_n - 1)$. Значит $f_{4,1} = f_{3,0} + f_{3,1} = f_{4,0} + f_{3,1}$. $X(a_4 - 2, ..., a_n - 2)$ — в разложениях $X(a_3, ..., a_n)$, $X(a_3 - 1, ..., a_n - 1)$, $X(a_3 - 2, ..., a_n - 2)$. Значит $f_{4,2} = f_{3,0} + f_{3,1} + f_{3,2} = f_{4,1} + f_{3,2}$. $X(a_4 - k, ..., a_n - k)$ — в разложениях $X(a_3, ..., a_n)$,..., $X(a_3 - k, ..., a_n - k)$. Значит $f_{4,k} = f_{3,0} + ... + f_{3,k-1} + f_{3,k} = f_{4,k-1} + f_{3,k}$.

$X(a_m - k, ..., a_n - k)$ встречается в разложениях $X(a_{m-1}, ..., a_n)$,..., $X(a_{m-1} - k, ..., a_n - k)$. Значит $f_{m,k} = f_{m-1,0} + ... + f_{m-1,k-1} + f_{m-1,k} = f_{m,k-1} + f_{m-1,k}$, если $a_{m-2} \leq k \leq a_{m-1} - 1$ и $f_{m,k} = f_{m,a_{m-2}-1}$, при $a_{m-2} \leq k \leq a_{m-1} - 1$.

Утверждение доказано.

3 Деревья

Нам понадобятся следующие определения.

Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d есть такое множество вершин, что: одна специально выбранная вершина называется *корнем* дерева d, оставшиеся вершины (исключая корень) разбиты на $m \geq 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом. Вершины, не имеющие приемников, называются *концевыми вершинами*. Вершины, имеющие приемников, называют *внутренними вершинами*.

Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами 1, 2, ..., n. Повторям следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными [4]. Пометим числом $n+1$ вершину v такую, что а) вершина v не помечена, а все ее приемники помечены и б) среди всех непомеченных вершин, все приемники которых помечены, v является вершиной, имеющей приемника с наименьшей меткой. Полученное дерево называется *помеченным*.

Пусть $n \geq 2,\ 2 \leq k \leq n$. Обозначим $D(n)$ — множество помеченных корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин, у которых из каждой внутренней вершины (и корня) исходит не менее двух вершин; $D(n,k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k приемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

Существует естественное соответствие между полными разбиениями и деревьями [4].

Четвертая задача Шредера (произвольные расстановки скобок в n-множестве) и ее обобщение, сформулированные в терминах деревьев, — подсчет мощности множеств $D(n)$ и $D(n,\ k)$ соответственно.

Pассмотрим структуры родственные деревьем, в которых важен порядок внутренних вершин в дереве. Чтобы его зафиксировать договоримся о способе обхода дерева: будем обходим дерево от корня слева, вверх, направо, вниз обратно к корню. Назовем типом дерева $d \in D(n,\ k)$ последовательность $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$ спеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева способом описанном выше. Обозначим $D(n, k, r_1, r_2, ..., r_{n-k})$ — множество деревьев $d \in D(n,\ k)$ типа $(r_1, r_2, ..., r_{n-k})$. Подсчет мощности этого множества может быть произведен с помощью формулы (3).

Список литературы

1.Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. — 294 с.

2. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979. — 152 с.

3. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Иностр. лит., 1963. — 287 с.

4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, поизводящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. — М.: Мир, 2005. — 767 с.