Н.И. Буторина
Н.А. Колокольникова

ЧИСЛА ЭЙЛЕРА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В статье рассматриваются комбинаторные числа, являющиеся обобщением чисел Эйлера. Изучаются некоторые свойства и возможные приложения этих чисел, а также вероятностные распределения, описываемые с их помощью. Для вычисления чисел составлена программа, приведенная в конце статьи. По этой программе вычислены числа, занесенные в таблицы 1-6.

1. Число возрастаний и числа Эйлера

Числа Эйлера A_{nk} возникают, в частности, при изучении числа возрастаний в случайных перестановках (см., например [1, с.114]).

Пусть имеется некоторая n-перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Элементы a_j и a_{j+1} в этой перестановке образуют возрастание, если $a_j < a_{j+1}$. Предполагается, что элементу a_1 предшествует возрастание. В этом случае $A_{n,k}$ – число перестановок из n элементов с k возрастаниями. Числа $A_{n,k}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n)$ могут быть заданы рекуррентным соотношением

$$A_{n,k} = (n - k + 1)\, A_{n-1,k-1} + k\, A_{n-1,k}. \qquad (1)$$

Если $n < k$, то $A_{nk} = 0$.

Эти числа обладают свойствами:

1) $A_{n,0} = 0,\ n = \overline{1,\infty}$;
2) $A_{n,1} = 1,\ n = \overline{1,\infty}$;
3) $A_{n,n} = 1,\ n = \overline{1,\infty}$;
4) $A_{n,k} = A_{n,n-k+1}, n = \overline{1,\infty}, k = \overline{1,\infty}$.

Представим эти числа при n<10 в виде таблицы:

Таблица 1. Числа Эйлера

$A_{n,k}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	11	11	1	0	0	0	0	0	0

5	0	1	26	66	26	1	0	0	0	0	0
6	0	1	57	302	302	57	1	0	0	0	0
7	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	0	0
8	0	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	0
9	0	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

Предположим, что все перестановки чисел $1,2,\dots,n$ равновозможны. Обозначим ξ_n число возрастаний в случайно выбранной n–перестановке. Тогда

$$P\{\xi_n = k\} = \frac{An,k}{n!},\ \ k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Математическое ожидание и дисперсия этой величины равны соответственно

$$M\xi_n = \frac{n+1}{2};\quad D\xi_n = \frac{n+1}{12}.$$

Известно [1, 2], что при $n \to \infty$ величина ξ_n является асимптотически нормальной.

К распределению (2) можно прийти, используя схему испытаний типа «успех-неуспех» и размещение шаров по ящикам.

Последовательно случайным образом размещаем шары, предполагая, что при размещении i – го ($i = \overline{1,n}$) шара имеется i ящиков, и попадание этого шара в каждый ящик равновозможно. Будем считать успехом попадание очередного шара в пустой ящик, а неуспехом – в непустой. Случайная величина ξ_n – число успехов в n испытаниях (число непустых ящиков при размещении n шаров), как нетрудно убедиться, есть величина, имеющая распределение (2).

2. ψ – схема последовательных испытаний и ψ – распределение

Рассмотрим более общий вариант схемы «успех-неуспех». Пусть P_{nk} – вероятность успеха в n – м испытании, если в предыдущих $n-1$ испытаниях реализовалось k успехов, q_{nk} – вероятность неуспеха в n – м испытании при том же условии, ξ_n – число успехов в n испытаниях.

Предположим, что q_{nk} имеет вид $q_{nk} = \alpha_{n-1}\gamma_k$, где α_{n-1}, γ_k – вообще говоря, произвольные неотрицательные числа такие, что $\alpha_{n-1}\gamma_k \le 1$ при любых допустимых n и k. Тогда $P_{nk} = 1 - \alpha_{n-1}\gamma_k$. В этом случае будем говорить, что испытания проводятся по ψ – схеме.

Теорема 1. Если последовательные испытания проводятся в условиях ψ – схемы, то случайная величина ξ_n имеет распределение

$$P\{\xi_n = k\} = \psi_k^n\ \prod_{i=o}^{n-1}\alpha_i,\ k = \overline{0,n}, n = \overline{1,\infty}, \tag{3}$$

где ψ_k^n – обобщенные числа Эйлера.

Эти числа удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\psi_k^n = \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - \gamma_{k-1}\right)\psi_{k-1}^{n-1} + \gamma_k \psi_k^{n-1}, k = \overline{1,n}, n = \overline{1,\infty}. \tag{4}$$

Кроме того, $\psi_0^0 = 1, \psi_k^n = 0$, если $(n < k) \cup (k < 0)$.

Доказательство теоремы проводится индукцией по *n*.

Рассмотрим частный случай распределения (3), когда $\gamma_k = k + c,$ где $c \geq 0$ некоторая константа. Будем называть данное распределение ψ – распределением. Формула (4) теперь примет вид

$$\psi_k^n = \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - (k-1) - c\right)\psi_{k-1}^{n-1} + (k+c)\psi_k^{n-1}, k = \overline{0, n-1}, n = \overline{1,\infty}. \tag{5}$$

Производящая функция изучаемого распределения с учетом равенства (5) может быть записана:

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_n = k\} x^k = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \sum_{k=0}^{n} \psi_k^n x^k =$$

$$= \alpha_{n-1}\left[\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - c\right) x\psi_{n-1}(x) - x^2 \psi_{n-1}^{`}(x) + x\psi_{n-1}^{`}(x) + c\psi_{n-1}(x)\right],$$

где $\psi_{n-1}'(x) = \frac{d}{dx}\psi_{n-1}(x)$.

Таким образом,

$$\psi_n(x) = \alpha_{n-1}\left[\left(c + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} + c\right) x\right)\psi_{n-1}(x) + x(1-x)\psi_{n-1}'(x)\right]. \tag{6}$$

С использованием формулы (6) доказано следующее утверждение:

Лемма. При $n \geq 1$ все n корней полинома $\psi_n(x)$ различны, действительны и отрицательны.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ – корни полинома $\psi_n(x)$. Тогда $\psi_n(x) = k(x - b_0)(x - b_1) \ldots (x - b_{n-1})$.

Поскольку $\psi_n(1) = 1$, то $k = [(1 - b_0)(1 - b_1) \ldots (1 - b_{n-1})]^{-1}$. Поэтому $\psi_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x - b_i}{1 - b_i}$.

Так как все $b_i < 0$, то, обозначив $-b_i = c_i > 0$, можем считать, что $\frac{x - c_i}{1 - c_i}$ – производящая функция случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{c_i}{1+c_i}, \frac{1}{1+c_i}$ соответственно. Таким образом, величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов. А это значит, что имеют место утверждения:

Теорема 2. Для того, чтобы при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\xi_n - M\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_n \to \infty$.

Теорема 3. Для того, чтобы при $n \to \infty$ равномерно относительно к $(k = \overline{0,\infty})$ имело место соотношение

$$\left|\sqrt{D\xi_n}\,P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}\right| \to 0,$$

где $x_{nk} = \frac{k - M\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}}$, необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_n \to \infty$.

3. Числовые характеристики ψ – распределения

Используя формулу (3) для чисел ψ_k^n, можем получить рекуррентное соотношение для математического ожидания величины ξ_n:

$$M\xi_n = (1 - \alpha_{n-1})M\xi_{n-1} + 1 - \alpha_{n-1}c, n = \overline{1,\infty}.$$

Применяя это равенство, методом математической индукции, устанавливаем следующий результат:

Теорема 4. При всех натуральных $n > 1$

$$M\xi_n = 1 - c\,\alpha_{n-1} + \sum_{j=o}^{n-2}\left(1 - c\,\alpha_j\right)\prod_{i=j+1}^{n-1}(1 - \alpha_i). \tag{7}$$

Аналогичным образом доказывается

Теорема 5. При всех натуральных $n > 1$

$$M\xi_n^2 = M\xi_n + (1 - 2c\alpha_{n-1})M\xi_{n-1} +$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}(M\xi_j + (1 - 2c\alpha_{j-1})M\xi_{j-1})\prod_{k=j}^{n-1}(1 - 2\alpha_k).$$

Таким образом, дисперсия величины ξ_n может быть найдена по формуле

$$D\xi_n = M\xi_n + (1 - 2c\alpha_{n-1})M\xi_{n-1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left(M\xi_i + M\xi_{j-1}(1 - 2c\alpha_{n-1})\right)\prod_{k=j}^{n-1}(1 - 2\alpha_k) - M(\xi_n)^2, \tag{8}$$

где $M\xi_0$=0, $M\xi_1 = 1 - c\alpha_0$, а при $n \geq 2$ $M\xi_n$ определяется формулой (7).

4. Частные случаи ψ – распределения

4.1. Пусть $\gamma_k = k, \alpha_{n-1} = \frac{1}{n}$. Тогда $\psi_k^n = A_{n,k}$, где $A_{n,k}$ – числа Эйлера.

Распределение (3) примет вид (2). Поскольку при $n \to \infty$ $D\xi_n = \frac{n}{2} \to \infty$, случайная величина ξ_n является асимптотически нормальной (имеют место утверждения теорем 2 и 3).

4.2. Пусть $\gamma_k = k + c$, $\alpha_{n-1} = \frac{1}{n}$. Тогда формула (5) примет вид

$$\psi_k^n = (n-k-c+1)\psi_{k-1}^{n-1} + (k+c)\psi_k^{n-1}, n = \overline{1,\infty}, k = \overline{c, n-c};$$

$$\psi_{-c}^0 = 1, \psi_k^n = 0, \text{ если } (n < k+c) \cup (k \le -c). \qquad (9)$$

Нетрудно видеть, что получаются числа Эйлера, со сдвигом вправо, если $c < 0$.

Таблица 2. Числа Эйлера со сдвигом на $c = -2$

$A_{n,k}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	11	11	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	26	66	26	1	0	0	0	0	0
6	0	1	57	302	302	57	1	0	0	0	0
7	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	0	0
8	0	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	0
9	0	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

Таблица 3. Числа Эйлера со сдвигом на $c = 2$

$A_{n,k}$	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
n=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	11	11	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	26	66	26	1	0	0	0	0	0
6	0	1	57	302	302	57	1	0	0	0	0
7	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	0	0
8	0	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	0

9	0	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

В данном случае $M\xi_n = \frac{n+1}{2} - c$, $D\xi_n = \frac{n+1}{2}$.
При $n \to \infty$ имеем то же, что и в пункте 4.1.

4.3. Пусть $\gamma_k = k + c$, $\alpha_{n-1} = \frac{1}{an}$, где $c = const$, $a = const > 0$. Тогда рекуррентная формула (5) примет вид

$$\psi_k^n = (an - (k - 1 + c)\psi_{k-1}^{n-1} + (k + c)\psi_k^{n-1}, n = \overline{1, \infty}, k = \overline{c, n - c};$$

с дополнительными условиями (9).
В таблицах 4 и 5 приведены числа ψ_k^n при $a = 2$; $c = 0$ и $c = 2$ соответственно.

Таблица 4. Числа ψ_k^n при $a = 2$, $c = 0$

$A_{n,k}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	22	24	0	0	0	0	0	0	0
4	0	2	58	204	120	0	0	0	0	0	0
5	0	2	134	1076	1908	720	0	0	0	0	0
6	0	2	290	4568	17316	18864	5040	0	0	0	0
7	0	2	606	17184	119512	267480	200016	40320	0	0	0
8	0	2	1242	60036	701440	2771544	4142376	2282400	362880	0	0
9	0	2	2518	199980	3706300	23677880	60884328	65685312	28009440	3628800	0

Таблица 5. Числа ψ_k^n при $a = 2$, $c = 2$

$A_{n,k}$	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
n=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	22	24	0	0	0	0	0	0	0

4	0	2	58	204	120	0	0	0	0	0	0
5	0	2	134	1076	1908	720	0	0	0	0	0
6	0	2	290	4568	17316	18864	5040	0	0	0	0
7	0	2	606	17184	119512	267480	200016	40320	0	0	0
8	0	2	1242	60036	701440	2771544	4142376	2282400	362880	0	0
9	0	2	2518	199980	3706300	23677880	60884328	65685312	28009440	3628800	0

Как видно из этих таблиц, получаемые при фиксированном a числа ψ_k^n отличаются сдвигом по столбцу значений *k* на *c* единиц.

При этом числа ψ_k^n обладают свойствами

1) $\psi_{1-c}^n = a$;

2) $\psi_{n-c}^n = a(2a-1)(3a-2)\dots(an-n+1)$.

Если $c = 0$, то распределение (3) числа успехов в *n* испытаниях запишется следующим образом:

$$P\{\xi_n = k\} = (a^n n!)^{-1}\psi_k^n, n = \overline{1,\infty}, k = \overline{0,n}; \qquad (10)$$

это распределение можно интерпретировать (если а – целое положительное число) следующим образом. Последовательно случайным образом размещаются шары по ящикам. При размещении *j*-го шара ($j = \overline{1,n}$) имеются *aj* ящиков. Считаем успехом попадание очередного шара в пустой ящик. Поскольку $p_{jk} = \frac{aj-k}{aj}, q_{jk} = \frac{k}{aj}$, где $k = \overline{0,j-1}, j = \overline{1,n}$, то величина ξ_n – число непустых ящиков после размещения *n* шаров – имеет распределение (10).

5. Число отрезков возрастания в случайной перестановке

Пусть имеется некоторая *n* – перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел *1,2, … , n*. Поместим вертикальные черточки с обоих концов этой перестановки, а также между числами a_j и a_{j+1} ($j = \overline{1,n-1}$), если $a_j > a_{j+1}$.

Отрезками возрастания перестановки называются сегменты, ограниченные парами черточек [4, с.50]. Например, перестановка *2415367* содержит три отрезка возрастания: |*24*|*15*|*367*|. Отрезки возрастания возникают при использовании алгоритмов сортировки.

Пусть $\eta_{n,m}$ – число отрезков возрастания в *n* – перестановке, элементы которой помечены *m* ключами. Предполагается, что ключ для элемента перестановки выбирается случайно, и множество ключей линейно упорядочено. Распределение величины $\eta_{n,m}$ имеет вид:

$$P\{\eta_{n,m} = \mathrm{k}\} = \frac{A_{n,k}}{m^k}\binom{m+n-k}{n}, k = \overline{1,m}. \qquad (11)$$

Это распределение детально исследовано в работе [5].

Очевидно, что

$$P\{\eta_{n,m} = \mathrm{k}\} = \frac{1}{m^n n!} A_{n,k}(m+n-k)_n,\ \ k = \overline{1,m}.$$

Распределение (10) при $a = m$ имеет вид:

$$P\{\xi_n = k\} = \frac{1}{m^n n!}\psi_k^n, k = \overline{1,n}.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{n}\psi_k^n = \sum_{k=1}^{m} A_{n,k}(m+n-k)_n$.

6. Приложение

Программная реализация осуществлена в среде MS Office с использованием языка программирования Visual Basic for Applications.

Основной цикл

```
For i = 0 To n
For j = 0 To k
        If (j = 0) And (i > 0) Or (i = 0) And (j > 0) Then
                ank(i, j) = 0
        Else
                If j = 0 And i = 0 Then
                        ank(i, j) = 1
                 Else
                        ank(i, j) = (a * i - (j - 1)) * ank(i - 1, j - 1) + j * ank(i - 1, j)
                End If
        End If
Next
Next
```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. –Н: Наука, 1982. – 384 с.
2. Сираждинов С.Х. Асимптотическое выражение для чисел Эйлера / С.Х. Сираждинов// Известия АН УзбССР. Сер. Физ. – мат. наук, 1979. – №6. – с. 39-43.

3. Докин В.Н. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. / В.Н. Докин, В.Д. Жуков, Н.А. Колокольникова, О.В. Кузьмин, М.Л. Платонов. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 208 с.
4. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т.3. Сортировка и поиск / Д.Кнут. – М: Мир. 1978. – 848 с.
5. Ватутин В.А. Предельные теоремы для числа отрезков возрастания в случайных перестановках порождаемых алгоритмами сортировки / В.А. Ватутин // Дискретная математика, 1994. – Т.6. – вып.1. –С. 83-99.