В следующих задачах на построение КА, работающих с числами в десятичной записи, достаточно построить автоматную таблицу.

14. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Построить КА, увеличивающий число в десятичной записи в два раза. Число подается поразрядно, начиная с младшего разряда. Сформулировать условие на число нулевых старших разрядов у числа, подаваемого на вход.

Пример работы: 09553 $\longrightarrow$ 19106.

15. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *\}$. На вход проектируемого КА подается последовательность чисел в десятичной записи, каждое, начиная с младшего разряда. Каждые два числа разделены символом $*$. Построить КА, который вместо очередного символа $*$ выдает последнюю цифру десятичной суммы всех чисел, поданных на вход до этой $*$. Сами числа переводятся в последовательность символов $*$.

Пример работы:
$*125*333*1024*111107*289 \longrightarrow 8***3***0****6******9***$.

16. $A_{вх} = A_{вых} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *\}$ На вход проектируемого КА подается последовательность чисел в десятичной записи, каждое, начиная с младшего разряда. Каждые два числа разделены символом $*$.

а) Построить КА, выдающий вместо $*$ остаток от деления на 3 числа, которое оканчивается данной $*$. Само число должно быть переведено в последовательность символов $*$.

Пример работы:
$*125*333*1024*111107*289 \longrightarrow 2***0***1****2******1***$.

б) Построить КА, выдающий вместо $*$ цифровой корень числа, которое оканчивается данной $*$. Само число должно быть переведено в последовательность символов $*$.

Примечание: если сложить все цифры числа, и затем с суммой производить ту же операцию до тех пор, пока не получится число из интервала от 1 до 9, то полученное число и будет цифровым корнем исходного.

Пример работы:
$*125*333*1024*111107*289 \longrightarrow 8***9***7****2******1***$.

2.4 Минимизация КА

2.4.1 Теорема о минимальном КА

При проектировании КА особое внимание следует уделять числу его внутренних состояний. Если при решении задачи на построение КА не так важно число состояний, с помощью которых осуществляется заданное преобразование информации,то при практической реализации данного процесса количество внутренних состояний становится достаточно значимым показателем. Нужное преобразование может быть осуществлено автоматами с разным числом внутренних состояний. В связи с этим возникает задача минимизации КА.

Состояния q автомата M и q' автомата M' будем называть эквивалентными, если оба автомата, получив одну и ту же (произвольную) входную последовательность в состояниях q и q' соответственно, перерабатывают ее в одну и ту же выходную последовательность.

Если $M = M'$, то q и q' являются эквивалентными состояниями одного и того же автомата. Если при этом $q \neq q'$, то, очевидно, одно из них является лишним, и автомат можно упростить.

Автоматы M и M' будем называть эквивалентными, если для каждого состояния автомата M существует эквивалентное ему состояние автомата M', и наоборот.

Автомат M', эквивалентный заданному автомату M и имеющий наименьшее возможное число состояний называется минимальным. Задача построения для заданного КА M минимального КА M', который работает так же как и M, называется задачей минимизации КА.

Данная задача имеет однозначное решение, которое может быть оформлено в виде достаточно простого алгоритма. Идея решения состоит в отыскании пар эквивалентных между собой внутренних состояний заданного КА M. После этого все классы эквивалентных между собой состояний объявляются состояниями нового минимального КА M'. Если в КА M имеется хотя бы два эквивалентных внутренних состояния, то процесс минимизации приведет к КА M' с меньшим числом внутренних состояний, в противном случае автомат M' совпадает с автоматом M.

Описание алгоритма минимизации автомата M. Пусть некоторый КА M задан в виде диаграммы или автоматной таблицы. Множество Q — множество его внутренних состояний.

На первом шаге алгоритма, все состояния из Q разбиваются на первое множество непересекающихся классов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k_1}$. Два состояния q_{i_1} и q_{i_2} будут принадлежать одному классу, если **для любого** символа $a_m \in A_{\textit{вх}}$ верно, что $\rho(a_m, q_{i_1}) = \rho(a_m, q_{i_2})$. Иными словами, если автомат M в состоянии q_{i_1} выдает то же, что и в состоянии q_{i_2} при подаче на вход произвольного символа a_m из алфавита входа, то q_{i_1} и q_{i_2} лежат в одном классе.

Если первый шаг затрагивал функцию выхода ρ, то второй и все последующие имеют дело с функцией перехода λ. Эти шаги выполняются одинаково, поэтому опишем их все сразу в общем виде.

Пусть после $t-1$-го шага множество внутренних состояний автомата M разбилось на классы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k_{t-1}}$. Построим разбиение с номером t. Два состояния q_{i_1} и q_{i_2} (если они принадлежали одному классу из $t-1$-го разбиения) будут снова принадлежать одному классу из t-го разбиения, если **для любого** $a_m \in A_{\textit{вх}}$ верно, что $\lambda(a_m, q_{i_1})$ и $\lambda(a_m, q_{i_2})$ принадлежат одному и тому же классу из $t-1$-го разбиения.

Очевидно, и на это следует обратить особое внимание, два состояния, попавшие на каком-то шаге в разные классы, далее так и останутся в разных классах. Иными словами, классы могут только разбиваться и никогда не объединяются. Отсюда следует, что количество классов на очередном шаге либо увеличится, либо останется тем же. В последнем случае разбиение останется прежним, и процесс стабилизируется. Тогда разбиение на классы эквивалентных состояний произведено. Остается каждый класс эквивалентных состояний назвать внутренним состоянием нового минимального КА M'.

Функция выхода ρ' для КА M' строится, исходя из последнего шага алгоритма минимизации. Если состояние q автомата M лежит в классе Q и $\rho(a, q) = b$, то $\rho'(a, Q) = b$ для каждого $a \in A_{\textit{вх}}$.

Функция перехода λ' для КА M' строится также, исходя из последнего, стабилизировавшегося разбиения алгоритма минимизации. Если при подаче сигнала $a \in A_{\textit{вх}}$ в последнем шаге алгоритма состояние из класса Q_i переходит в состояние из класса Q_j, то $\lambda'(a, Q_i) = Q_j$. (Более подробно разберем этот шаг на примерах.)

Обратим внимание на тот факт, что процесс минимизации обязательно остановится, так как число внутренних состояний КА конечно. Тогда и число классов разбиения на каждом шаге конечно и не превышает числа состояний. Алгоритм продолжает работу, если на следующем шаге число классов увеличивается. Самый предельный случай – каждое состояние образует свой класс. После этого процесс стабилизируется, так как дальше разбивать уже нельзя. В этом случае пар эквивалентных состояний нет, и исходный автомат уже является минимальным.

Теорема. Любой минимальный КА для автомата M с точностью до переобозначения состояний совпадает с автоматом M', построенным при помощи алгоритма минимизации.

Доказательство теоремы разобьем на две части:

1°. КА M' эквивалентен исходному автомату M.

Прежде всего, покажем, что если КА M в состоянии q_i, получив на вход a_k, переходит в состояние q_j и выдает a_s, причем $q_i \in Q_{t_i}$, $q_j \in Q_{t_j}$, то КА M' в состоянии Q_{t_i}, получив на вход a_k, перейдет в состояние Q_{t_j} и выдаст a_s.

Действительно, по определению функции ρ' получим: так как $\rho(a_k, q_i) = a_s$ и $q_i \in Q_{t_i}$, то $\rho'(a_k, Q_{t_i}) = a_s$.

Далее, пусть $\lambda(a_k, q_i) = q_j$ и q_j попадает в класс Q'_{t_j} предпоследнего разбиения алгоритма. Согласно работе алгоритма, мы на последнем шаге отмечаем, что из состояния Q_{t_i} (содержащего q_i) КА M' попадает в Q'_{t_j} при подаче на вход a_k. Так как предпоследнее и последнее разбиения совпадают, то $Q'_{t_j} = Q_{t_j}$ и $q_j \in Q_{t_j}$. При этом $\lambda'(a_k, Q_{t_i}) = Q_{t_j}$.

Теперь покажем, что автоматы M и M' работают одинаково (эквиваленты). Подадим им на вход в состояниях q_i и Q_{t_i} соответственно ($q_i \in Q_{t_i}$) некоторую последовательность $a_{k_n} \dots a_{k_2} a_{k_1} \rightarrow$.

a_{k_1}) Пусть $\rho(a_{k_1}, q_i) = a_{s_1}$, $\lambda(a_{k_1}, q_i) = q_{j1}$ и $q_{j1} \in Q_{t_{j1}}$, тогда $\rho'(a_{k_1}, Q_{t_i}) = a_{s_1}$ и $\lambda'(a_{k_1}, Q_{t_i}) = Q_{t_{j1}}$.

a_{k_2}) Пусть $\rho(a_{k_2}, q_{j1}) = a_{s_2}$, $\lambda(a_{k_2}, q_{j1}) = q_{j2}$ и $q_{j2} \in Q_{t_{j2}}$, тогда $\rho'(a_{k_2}, Q_{t_{j1}}) = a_{s_2}$ и $\lambda'(a_{k_2}, Q_{t_{j1}}) = Q_{t_{j2}}$.

...

a_{k_n}) Пусть $\rho(a_{k_n}, q_{j(n-1)}) = a_{s_n}$, $\lambda(a_{k_n}, q_{j(n-1)}) = q_{jn}$ и $q_{jn} \in Q_{t_{jn}}$, тогда $\rho'(a_{k_n}, Q_{t_{j(n-1)}}) = a_{s_n}$ и $\lambda'(a_{k_n}, Q_{t_{j(n-1)}}) = Q_{t_{jn}}$.

В результате получим, что и M и M' на входной последовательности $a_{k_n} \dots a_{k_2} a_{k_1} \rightarrow$ выдадут одну и ту же выходную последовательность $a_{s_n} \dots a_{s_2} a_{s_1}$, что говорит о том, что состояния q_i и Q_{t_i} эквивалентны. Так как это верно для произвольных q_i и Q_{t_i}, таких, что $q_i \in Q_{t_i}$, то автоматы M и M' эквивалентны.

2°. Автомат M' является минимальным.

Лемма. Все состояния автомата M' попарно не эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим пару состояний Q_i и Q_j автомата M'. Покажем, что они не эквивалентны, т.е. существует такая последовательность из символов $A_{вх}$, что автомат M', начав работу в состоянии Q_i при подаче на вход этой последовательности выдает не то, что начав работу в состоянии Q_j.

Так как Q_i и Q_j разные классы, то найдется символ $a_{i_1} \in A_{вх}$, на котором Q_i и Q_j различаются. Пусть при подаче a_{i_1} Q_i переходит в класс Q_{p_1} предыдущего разбиения, а Q_j переходит в класс Q_{t_1} предыдущего разбиения.

Так как Q_{p_1} и Q_{t_1} разные классы, то найдется символ $a_{i_2} \in A_{вх}$, на котором Q_{p_1} переходит в класс Q_{p_2} предыдущего разбиения, а Q_{t_1} переходит в класс Q_{t_2} предыдущего разбиения, и.т.д.

В результате получим последовательность $a_{i_n}, \dots, a_{i_2}, a_{i_1} \rightarrow$, причем на символе a_{i_n} различаются классы разбиения первого шага алгоритма, т.е. обязательно различаются последние выходные символы, откуда следует, что Q_i и Q_j не эквивалентны.

Лемма доказана.

Рассмотрим в качестве примера, иллюстрирующего лемму, задачу 2 на стр. 62. Построим последовательность символов $A_{вх}$, на

которой различаются, например, состояния Q_0 и Q_1 минимизированного автомата M'.

Из третьего шага можно видеть, что Q_0 и Q_1 различаются по первому символу (по 0). На нем Q_0 переходит в класс Q_3 предыдущего шага, а Q_1 переходит в класс Q_2.

Из второго шага можно видеть, что Q_3 и Q_2 различаются по второму символу (по 1). На нем Q_3 переходит в класс Q_0 предыдущего шага, а Q_2 переходит в класс Q_1.

Из первого шага можно видеть, что Q_0 и Q_1 различаются по первому символу (по 0). На нем Q_0 выдает 0, а Q_1 выдает 1.

Таким образом, искомая последовательность имеет вид $010 \rightarrow$. На этой последовательности автомат M', начав из состояния Q_0 выдает $\rightarrow 000$, начав же из состояния Q_1, этот автомат выдает $\rightarrow 100$, т.е. состояния Q_0 и Q_1 не эквивалентны. Проделав такую операцию для всех пар состояний автомата M', можно показать, что все они не эквивалентны между собой.

Возвращаясь к доказательству минимальности автомата M', предположим противное, т.е. существование автомата M'', эквивалентного M и имеющего меньше состояний чем M'. Из того, что $M'' \sim M$ и $M \sim M'$, следует $M'' \sim M'$. Так как в M'' состояний меньше, чем в M', то в M' найдутся два состояния q'_i и q'_j, такие, что им эквивалентно одно состояние q'' в автомате M''. Это означает, что $q'_i \sim q'_j$, а это противоречит лемме. Таким образом, автомата M'' не существует.

2.4.2 Иллюстрирующие примеры

Подробно рассмотрим решение нескольких задач на минимизацию заданного КА.

1) *В первом примере рассмотрим минимизацию автомата, который был построен в примере 2 предыдущего раздела.*

Его автоматная таблица имеет вид:

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$0/q_1$	$0/q_1$	$1/q_1$	$2/q_1$
1	$1/q_2$	$1/q_2$	$2/q_2$	$3/q_2$
2	$2/q_3$	$2/q_3$	$3/q_3$	$4/q_3$

Применим к данному автомату алгоритм минимизации. Очевидно, что $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$. Далее будем рассматривать элементы $A_{вх}$ в следующем порядке: 0, 1, 2. Заметим, что на вход они подаются не как последовательность, а поочередно и независимо друг от друга.

1 шаг. При подаче на вход 0, 1, 2 автомат:

в состоянии q_0 выдаст 0, 1, 2 соответственно;
в состоянии q_1 выдаст 0, 1, 2 соответственно;
в состоянии q_2 выдаст 1, 2, 3 соответственно;
в состоянии q_3 выдаст 2, 3, 4 соответственно;

Обозначим это следующим образом:

$$Q_0 = \overset{012}{\{q_0, q_1\}},\ Q_1 = \overset{123}{\{q_2\}},\ Q_0 = \overset{234}{\{q_3\}},$$

то есть над первой фигурной скобкой запишем те символы, что подаются на выход, если на вход поочередно подаются символы $A_{вх}$ в зафиксированном порядке и независимо друг от друга.

2 шаг. Рассмотрим в какие классы полученного разбиения происходит переход из каждого состояния, если на вход подаются символы из $A_{вх}$ в установленном порядке 0, 1, 2:

q_0 переходит соответственно в q_1, q_2, q_3, т. е. в Q_0, Q_1, Q_2;
q_1 переходит соответственно в q_1, q_2, q_3, т. е. в Q_0, Q_1, Q_2;
q_2 переходит соответственно в q_1, q_2, q_3, т. е. в Q_0, Q_1, Q_2;
q_3 переходит соответственно в q_1, q_2, q_3, т. е. в Q_0, Q_1, Q_2.

Таким образом имеем следующее разбиение второго шага:

$$Q_0 = \overset{Q_0Q_1Q_2}{\{q_0, q_1\}},\ Q_1 = \overset{Q_0Q_1Q_2}{\{q_2\}},\ Q_0 = \overset{Q_0Q_1Q_2}{\{q_3\}},$$

где снова отметим те классы, в которые переходит КА из рассматриваемых состояний на порядке входных символов 0, 1, 2. Видно, что порядок везде один и тот же, но состояния q_0 и q_1 были в одном

классе, q_2 – во втором, q_3 – в третьем, т. е. эти классы не могут быть объединены. Далее заметим, что разбиения первого и второго шагов совпадают, т. е. процесс стабилизировался. У нового КА M' будет три внутренних состояния Q_0, Q_1 и Q_2.

При подаче символов 0, 1, 2:

в состоянии Q_0 КА M' выдает 0, 1, 2 соответственно
и переходит в Q_0, Q_1, Q_2 соответственно;
в состоянии Q_1 КА M' выдает 1, 2, 3 соответственно
и переходит в Q_0, Q_1, Q_2 соответственно;
в состоянии Q_2 КА M' выдает 2, 3, 4 соответственно
и переходит в Q_0, Q_1, Q_2 соответственно.

Автоматная таблица будет иметь вид:

	Q_0	Q_1	Q_2
0	$0/Q_0$	$1/Q_0$	$2/Q_0$
1	$1/Q_1$	$2/Q_1$	$3/Q_1$
2	$2/Q_2$	$3/Q_2$	$4/q_2$

Первоначально автомат имел четыре состояния, минимизированный – три. Эти автоматы эквивалентны в том смысле, что на любой входной последовательности они выдают одну и ту же последовательность на выход, т. е. осуществляют одно и то же преобразование информации. Обратим внимание, что первоначальное состояние q_0 входит в класс Q_0, который является стартовым для построенного КА M'.

2) *Минимизировать КА, заданный автоматной таблицей.*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$0/q_7$	$0/q_2$	$1/q_0$	$0/q_7$	$0/q_2$	$1/q_3$	$0/q_5$	$0/q_6$
1	$0/q_2$	$0/q_4$	$0/q_2$	$0/q_5$	$0/q_1$	$0/q_5$	$0/q_6$	$0/q_0$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$. Зафиксируем следующий порядок на $A_{вх}$: 0, 1.

1 шаг. На первом шаге множество Q разбивается на следующие классы: $Q_0 \overset{00}{=} \{q_0, q_1, q_3, q_4, q_6, q_7\}$ и $Q_1 \overset{10}{=} \{q_2, q_5\}$. Как было сказано ранее, в Q_0 попадут те внутренние состояния, которые выдают на порядке входных символов 0, 1 символы 0, 0; в Q_1 попадут те состояния, которые выдают на порядке входных символов 0, 1 символы 1, 0. Отметим, что через Q_0 обозначаем тот класс, где содержится q_0.

2 шаг. Теперь обращаем внимание в какой из классов Q_0 или Q_1 происходит переход из рассматриваемого состояния на порядке входных символов 0, 1:

q_0 переходит соответственно в q_7 и q_2 т. е. в Q_0 и Q_1;
q_1 переходит соответственно в q_2 и q_4 т. е. в Q_1 и Q_0;
q_2 переходит соответственно в q_0 и q_2 т. е. в Q_0 и Q_1;
q_3 переходит соответственно в q_7 и q_5 т. е. в Q_0 и Q_1;
q_4 переходит соответственно в q_2 и q_1 т. е. в Q_1 и Q_0;
q_5 переходит соответственно в q_3 и q_5 т. е. в Q_0 и Q_1;
q_6 переходит соответственно в q_5 и q_6 т. е. в Q_1 и Q_0;
q_7 переходит соответственно в q_6 и q_0 т. е. в Q_0 и Q_0.

Разбиение второго шага имеет вид:

$Q_0 \overset{Q_0Q_1}{=} \{q_0, q_3\}$, $Q_1 \overset{Q_1Q_0}{=} \{q_1, q_4, q_6\}$, $Q_2 \overset{Q_0Q_1}{=} \{q_2, q_5\}$, $Q_3 \overset{Q_0Q_0}{=} \{q_7\}$.

Еще раз обратим внимание, на тот факт, что хотя $\{q_0, q_3\}$ и $\{q_2, q_5\}$ переходят в одни и те же классы, они не объединяются, так как на предыдущем шаге находились в разных классах.

3 шаг. Сразу построим разбиение третьего шага на порядке 0, 1:

$Q_0 \overset{Q_3Q_2}{=} \{q_0, q_3\}$, $Q_1 \overset{Q_2Q_1}{=} \{q_1, q_4, q_6\}$, $Q_2 \overset{Q_0Q_2}{=} \{q_2, q_5\}$, $Q_3 \overset{Q_1Q_0}{=} \{q_7\}$.

Видно, что разбиения второго и третьего шагов совпадают, т. е. процесс стабилизировался. Согласно первому и последнему разбиению, на порядке 0, 1:

в состоянии Q_0 КА M' выдает 0, 0 соответственно
и переходит в Q_3, Q_2 соответственно;
в состоянии Q_1 КА M' выдает 0, 0 соответственно
и переходит в Q_2, Q_1 соответственно;

в состоянии Q_2 КА M' выдает 1, 0 соответственно
и переходит в Q_0, Q_2 соответственно;
в состоянии Q_3 КА M' выдает 0, 0 соответственно
и переходит в Q_1, Q_0 соответственно.

Автоматная таблица для КА M' имеет вид:

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3
0	0/Q_3	0/Q_2	1/Q_0	0/Q_1
1	0/Q_2	0/Q_1	0/Q_2	0/Q_0

3) *Минимизировать КА, заданный автоматной таблицей.*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	0/q_9	0/q_4	0/q_{10}	0/q_9	1/q_9	1/q_{10}
1	1/q_3	1/q_7	1/q_1	1/q_0	0/q_2	0/q_3

	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
0	1/q_9	1/q_{10}	1/q_{10}	1/q_9	1/q_9
1	0/q_4	0/q_8	0/q_7	1/q_6	1/q_5

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}$. Зафиксируем следующий порядок на $A_{вх}$: 0, 1.

Приведем описание выполнения алгоритма минимизации по шагам в краткой записи.

1 шаг.

$Q_0 \overset{01}{=} \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $Q_1 \overset{10}{=} \{q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$, $Q_2 \overset{11}{=} \{q_9, q_{10}\}$.

2 шаг.

$Q_0 \overset{Q_2Q_0}{=} \{q_0, q_2, q_3\}$, $Q_1 \overset{Q_1Q_1}{=} \{q_1\}$, $Q_2 \overset{Q_2Q_0}{=} \{q_4, q_5\}$, $Q_3 \overset{Q_2Q_1}{=} \{q_6, q_7, q_8\}$,

$Q_4 = \overset{Q_2Q_1}{\{q_9, q_{10}\}}$.

3 шаг.

$Q_0 = \overset{Q_4Q_0}{\{q_0, q_3\}}$, $Q_1 = \overset{Q_4Q_1}{\{q_2\}}$, $Q_2 = \overset{Q_2Q_3}{\{q_1\}}$, $Q_3 = \overset{Q_4Q_0}{\{q_4, q_5\}}$, $Q_4 = \overset{Q_4Q_2}{\{q_6\}}$,
$Q_5 = \overset{Q_4Q_3}{\{q_7, q_8\}}$, $Q_6 = \overset{Q_4Q_3}{\{q_9\}}$, $Q_7 = \overset{Q_4Q_2}{\{q_{10}\}}$.

4 шаг.

$Q_0 = \overset{Q_6Q_0}{\{q_0, q_3\}}$, $Q_1 = \overset{Q_7Q_2}{\{q_2\}}$, $Q_2 = \overset{Q_3Q_5}{\{q_1\}}$, $Q_3 = \overset{Q_6Q_1}{\{q_4\}}$, $Q_4 = \overset{Q_7Q_0}{\{q_5\}}$,
$Q_5 = \overset{Q_6Q_3}{\{q_6\}}$, $Q_6 = \overset{Q_7Q_5}{\{q_7, q_8\}}$, $Q_7 = \overset{Q_6Q_4}{\{q_9\}}$, $Q_8 = \overset{Q_6Q_3}{\{q_{10}\}}$.

5 шаг.

$Q_0 = \overset{Q_7Q_0}{\{q_0, q_3\}}$, $Q_1 = \overset{Q_8Q_2}{\{q_2\}}$, $Q_2 = \overset{Q_3Q_6}{\{q_1\}}$, $Q_3 = \overset{Q_7Q_1}{\{q_4\}}$, $Q_4 = \overset{Q_8Q_0}{\{q_5\}}$,
$Q_5 = \overset{Q_7Q_3}{\{q_6\}}$, $Q_6 = \overset{Q_8Q_6}{\{q_7, q_8\}}$, $Q_7 = \overset{Q_7Q_5}{\{q_9\}}$, $Q_8 = \overset{Q_7Q_4}{\{q_{10}\}}$.

Произошла стабилизация. Минимальный КА M' будет иметь девять состояний. Его автоматная таблица имеет вид:

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
0	$0/Q_7$	$0/Q_8$	$0/Q_3$	$1/Q_7$	$1/Q_8$	$1/Q_7$
1	$1/Q_0$	$1/Q_2$	$1/Q_6$	$0/Q_1$	$0/Q_0$	$0/Q_3$

	Q_6	Q_7	Q_8
0	$1/Q_8$	$1/Q_7$	$1/Q_7$
1	$0/Q_6$	$1/Q_5$	$1/Q_4$

4) *Минимизировать КА, заданный автоматной таблицей.*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$0/q_2$	$0/q_3$	$1/q_2$	$1/q_3$	$0/q_0$
1	$0/q_3$	$0/q_4$	$0/q_3$	$1/q_4$	$1/q_4$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$.

Зафиксируем следующий порядок на $A_{вх}$: 0, 1.

1 шаг.

$Q_0 = \overset{00}{\{q_0, q_1\}}$, $Q_1 = \overset{10}{\{q_2\}}$, $Q_2 = \overset{11}{\{q_3\}}$, $Q_4 = \overset{01}{\{q_4\}}$.

2 шаг.

$Q_0 = \overset{Q_1Q_2}{\{q_0\}}$, $Q_1 = \overset{Q_2Q_3}{\{q_1\}}$, $Q_2 = \overset{Q_1Q_2}{\{q_2\}}$, $Q_3 = \overset{Q_2Q_3}{\{q_3\}}$, $Q_4 = \overset{Q_0Q_3}{\{q_4\}}$.

После второго шага получено самое мелкое из возможных разбиений множества Q, при котором каждое состояние образует свой класс. Третий шаг делать не имеет смысла, так как дальше уже разбить множество Q невозможно. Очевидно, что число состояний КА M' будет совпадать с числом состояний исходного КА M, т. е. автомат M уже является минимальным.

Задачи для самостоятельного решения

Во всех следующих задачах необходимо минимизировать КА, заданный в виде автоматной таблицы.

1.

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	$0/q_2$	$1/q_3$	$1/q_1$	$0/q_0$
1	$0/q_3$	$1/q_1$	$1/q_2$	$0/q_1$

2.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$1/q_3$	$0/q_6$	$1/q_1$	$0/q_4$	$1/q_5$	$0/q_0$	$1/q_7$	$0/q_2$
1	$0/q_7$	$1/q_2$	$0/q_5$	$1/q_6$	$0/q_5$	$1/q_4$	$0/q_3$	$1/q_0$

3.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$0/q_1$	$0/q_5$	$1/q_4$	$1/q_0$	$1/q_4$	$0/q_1$
1	$1/q_5$	$1/q_3$	$1/q_0$	$1/q_4$	$1/q_5$	$1/q_0$

4.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$1/q_5$	$1/q_2$	$1/q_4$	$0/q_0$	$1/q_0$	$1/q_0$
1	$0/q_2$	$0/q_3$	$0/q_1$	$1/q_5$	$0/q_5$	$0/q_2$

5.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$1/q_2$	$0/q_2$	$1/q_4$	$1/q_1$	$0/q_2$	$0/q_2$	$0/q_2$
+	$1/q_6$	$1/q_3$	$1/q_1$	$1/q_6$	$0/q_1$	$0/q_6$	$1/q_3$
*	$0/q_4$	$0/q_1$	$0/q_3$	$0/q_6$	$1/q_5$	$1/q_4$	$0/q_6$

6.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$+/q_1$	$+/q_0$	$0/q_0$	$+/q_2$	$0/q_1$	$+/q_2$
1	$+/q_2$	$+/q_2$	$*/q_2$	$+/q_5$	$*/q_2$	$+/q_3$
2	$*/q_3$	$0/q_4$	$+/q_4$	$0/q_4$	$*/q_5$	$0/q_4$
3	$0/q_5$	$+/q_1$	$*/q_1$	$0/q_0$	$0/q_3$	$0/q_0$

7.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
0	$0/q_3$	$0/q_5$	$0/q_8$	$0/q_6$	$0/q_1$	$0/q_7$	$0/q_3$	$0/q_1$	$0/q_5$
1	$1/q_1$	$1/q_0$	$1/q_0$	$1/q_5$	$1/q_6$	$1/q_3$	$1/q_8$	$1/q_0$	$1/q_6$
2	$0/q_7$	$1/q_4$	$1/q_3$	$0/q_4$	$1/q_3$	$1/q_2$	$0/q_2$	$1/q_3$	$1/q_7$

8.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$0/q_1$	$1/q_5$	$1/q_6$	$1/q_6$	$0/q_0$	$0/q_5$	$0/q_6$
1	$0/q_2$	$0/q_0$	$0/q_4$	$0/q_8$	$0/q_7$	$1/q_1$	$1/q_3$
2	$1/q_3$	$0/q_8$	$0/q_9$	$0/q_0$	$1/q_9$	$1/q_3$	$1/q_1$

	q_7	q_8	q_9
0	$1/q_5$	$0/q_3$	$0/q_8$
1	$0/q_9$	$0/q_7$	$0/q_2$
2	$0/q_9$	$1/q_1$	$1/q_4$

9.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$1/q_1$	$1/q_2$	$1/q_6$	$1/q_7$	$1/q_9$	$1/q_6$	$1/q_7$
1	$1/q_2$	$0/q_4$	$0/q_9$	$1/q_{11}$	$0/q_1$	$1/q_4$	$0/q_2$
2	$0/q_0$	$1/q_{11}$	$1/q_0$	$0/q_1$	$1/q_{10}$	$0/q_5$	$1/q_3$

	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
0	$1/q_1$	$1/q_4$	$1/q_4$	$1/q_9$	$1/q_2$
1	$0/q_6$	$1/q_3$	$0/q_2$	$1/q_7$	$1/q_8$
2	$1/q_5$	$0/q_6$	$1/q_8$	$0/q_{10}$	$0/q_9$

10.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$1/q_9$	$2/q_8$	$1/q_4$	$0/q_5$	$2/q_3$	$1/q_4$	$0/q_{11}$
1	$2/q_7$	$0/q_0$	$2/q_3$	$1/q_{10}$	$0/q_2$	$2/q_8$	$1/q_4$
2	$0/q_0$	$1/q_9$	$0/q_2$	$2/q_7$	$1/q_{11}$	$0/q_{11}$	$2/q_8$

	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
0	$0/q_{11}$	$0/q_5$	$2/q_7$	$2/q_6$	$1/q_9$
1	$1/q_1$	$1/q_9$	$0/q_0$	$0/q_2$	$2/q_6$
2	$2/q_3$	$2/q_6$	$1/q_5$	$1/q_4$	$0/q_5$

11.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$0/q_{10}$	$0/q_7$	$0/q_7$	$0/q_0$	$0/q_0$	$0/q_0$
1	$1/q_3$	$1/q_2$	$1/q_1$	$1/q_{11}$	$1/q_{12}$	$1/q_{13}$
2	$0/q_{13}$	$0/q_9$	$0/q_8$	$0/q_6$	$0/q_5$	$0/q_4$

	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
0	$0/q_0$	$1/q_8$	$1/q_{14}$	$1/q_{13}$	$1/q_{11}$	$1/q_6$
1	$1/q_{14}$	$0/q_4$	$0/q_0$	$0/q_0$	$0/q_0$	$0/q_{10}$
2	$0/q_3$	$1/q_{12}$	$1/q_{10}$	$1/q_9$	$1/q_8$	$1/q_2$

	q_{12}	q_{13}	q_{14}
0	$1/q_5$	$1/q_4$	$1/q_3$
1	$0/q_8$	$0/q_9$	$0/q_8$
2	$1/q_1$	$1/q_2$	$1/q_1$

12.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	0/q_8	0/q_3	0/q_3	0/q_2	0/q_7	0/q_0	0/q_8
1	1/q_6	1/q_{10}	1/q_{12}	1/q_4	1/q_1	1/q_{12}	1/q_0
2	1/q_2	0/q_5	0/q_2	0/q_{11}	0/q_6	1/q_3	1/q_{10}

	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}
0	0/q_4	0/q_8	0/q_0	0/q_3	0/q_1	0/q_6
1	1/q_5	1/q_7	1/q_5	1/q_9	1/q_{11}	1/q_5
2	0/q_7	0/q_{12}	1/q_4	0/q_{10}	1/q_7	1/q_4

13.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	1/q_3	1/q_0	1/q_5	1/q_3	0/q_2	1/q_1	1/q_5
1	0/q_6	0/q_1	0/q_4	0/q_0	1/q_5	0/q_2	0/q_0

14.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	1/q_9	0/q_7	0/q_4	0/q_3	1/q_9	1/q_9	0/q_0
1	1/q_8	0/q_9	0/q_6	0/q_9	1/q_5	1/q_0	0/q_2
2	0/q_4	1/q_5	1/q_5	1/q_0	0/q_8	0/q_0	1/q_8

	q_7	q_8	q_9
0	0/q_1	1/q_9	0/q_6
1	0/q_9	1/q_4	0/q_7
2	1/q_8	0/q_5	1/q_8

15.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	1/q_5	0/q_2	1/q_8	1/q_1	2/q_{10}	0/q_0
1	1/q_{15}	1/q_8	1/q_6	1/q_{12}	0/q_1	1/q_5
2	2/q_7	2/q_{15}	2/q_3	2/q_{10}	1/q_{15}	2/q_6

	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
0	2/q_{13}	1/q_5	0/q_0	2/q_{13}	1/q_0	0/q_3
1	0/q_{11}	1/q_{14}	1/q_1	0/q_8	1/q_{11}	1/q_8
2	1/q_9	2/q_{13}	2/q_6	1/q_6	2/q_4	2/q_6

	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}
0	0/q_7	1/q_2	0/q_3	2/q_{10}
1	1/q_5	1/q_{11}	1/q_1	0/q_{12}
2	2/q_{15}	2/q_9	2/q_{15}	1/q_4

2.5 Реализация КА в виде системы булевых функций

Подводя некоторые итоги, отметим, что первыми шагами при реализации некоторого преобразования информации являются следующие:

а) спроектировать его в виде автоматной таблицы либо диаграммы;

б) произвести процесс минимизации полученного КА.

Следующим этапом при построении КА в виде действующего устройства является реализация его в виде системы булевых функций. Для этого необходимо, прежде всего, произвести двоичное кодирование всех множеств, используемых при описании работы КА, а именно: входного алфавита $A_{вх}$, выходного алфавита $A_{вых}$

и множества внутренних состояний Q. Если при проектировании КА удобно считать, что у него имеется один вход и один выход, на которых могут появляться сигналы из некоторого произвольного алфавита, то дальнейшая работа может проводиться лишь с алфавитом $E = \{0, 1\}$. Это обусловлено сложившимися на сегодняшний момент схемами обработки информации, основанными на ее двоичном кодировании. Очевидно, что если будут реализованы устройства, работающие не медленнее современных ЭВМ, и использующие в своей работе не два а n состояний (три и более), то двоичное кодирование можно будет заменить на кодирование по модулю n. Общая идея при этом останется прежней: заменить все символы алфавита натуральными числами (например, их номерами в алфавите) и далее эти номера записать в системе исчисления с основанием n. Дальнейшая работа происходит не с символами алфавита, а с n-ичной записью их номеров. При необходимости можно дополнить схему устройством, производящим обратный кодированию процесс, т. е. по номеру символа выдающего сам символ.

Согласно вышеприведенной схеме, все символы $A_{вх}$, $A_{вых}$ и Q нумеруются и каждому ставится во взаимное соответствие его номер в двоичной записи. Одновременно с этим необходимо подсчитать число двоичных входов, двоичных выходов и число задержек, необходимых для реализации процесса.

Пусть в $A_{вх}$ имеется k_1 символов, в $A_{вых}$ имеется k_2 символов, в Q имеется m состояний, тогда схема будет включать в себя p_1 входов, p_2 выходов и s задержек, где

$$2^{p_1-1} < k_1 \le 2^{p_1}; \quad 2^{p_2-1} < k_2 \le 2^{p_2}; \quad 2^{s-1} < m \le 2^s$$

Система булевых функций полностью определяет в какое состояние перейдет и какой символ подаст на выход КА в момент времени t, если в момент времени $t-1$ он находился в одном из внутренних состояний q_j и получил на вход символ a_i. Зависимость от времени указывается в названиях аргументов и функций системы.

Пусть имеется p_1 входов, p_2 выходов и s задержек. Тогда система будет состоять из следующих функций: $y_1(t)$, $y_2(t), \ldots, y_{p_2}(t)$,

$Q_1(t)$, $Q_2(t), \ldots,$ $Q_s(t)$. Функции этой системы будут зависеть от аргументов $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_{p_1}(t)$, $Q_1(t-1)$, $Q_2(t-1), \ldots, Q_s(t-1)$. Видно, что размерность функций явно зависит от числа задержек, а те, в свою очередь зависят от числа внутренних состояний КА. В силу этого процесс минимизации КА может уменьшить размерность функций, что значительно упростит дальнейшую работу.

Рассмотрим соответствующий пример.

1) *Представить КА, заданный автоматной таблицей в виде системы булевых функций:*

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	a/q_2	c/q_3	e/q_1	d/q_0
1	b/q_1	e/q_0	e/q_3	a/q_2
2	d/q_0	a/q_1	c/q_3	b/q_0

$A_{вх} = \{0, 1, 2\}, \;\; k_1 = 3$
$A_{вых} = \{a, b, c, d, e\}, \;\; k_2 = 5$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \;\; m = 4$

Найдем число входов p_1, число выходов p_2 и число задержек s. Очевидно

$$2^1 < k_1 = 3 \le 2^2; \quad 2^2 < k_2 = 5 \le 2^3; \quad 2^1 < m = 4 \le 2^2,$$

откуда следует, что схема будет иметь два входа, три выхода и две задержки. Система будет состоять из пяти функций, каждая размерности четыре.

Произведем двоичное кодирование:

$A_{вх}$: $0 = 00$, $1 = 01$, $2 = 10$	$A_{вых}$: $a = 000$, $b = 001$, $c = 010$, $d = 011$, $e = 100$	Q: $q_0 = 00$, $q_1 = 01$, $q_2 = 10$, $q_3 = 11$

Построим систему булевых функций, обращая внимание на автоматную таблицу:

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$Q_1(t-1)$	$Q_2(t-1)$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$Q_1(t)$	$Q_2(t)$
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0
$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	*	*	*	*	*
1	1	0	1	*	*	*	*	*
1	1	1	0	*	*	*	*	*
1	1	1	1	*	*	*	*	*

Прокомментируем, как следует понимать данную запись на примере выделенной строки. В ней записано, что если в момент t на входы x_1 и x_2 подается 0 и 1 соответственно, и КА находится в состоянии 10 (задержки Q_1 и Q_2), то необходимо на выходы y_1, y_2, y_3 подать сигналы 1, 0, 0 и перейти в состояние 11. Если перейти от двоичной записи к обычной, используемой в автоматной таблице, то получим, что если в момент t на вход подается 1 и КА находится в состоянии q_2, то на выход он должен подать сигнал e и перейти в состояние q_3, что и отражено в соответствующем месте автоматной таблицы. Таким образом, система булевых функций является полным описанием КА и может быть построена по автоматной таблице либо диаграмме КА.

Обратим внимание на символы $*$ в таблице. Таким способом будем отмечать что нам не важен сигнал, находящийся в данном месте таблицы. Действительно, в приведенном примере на входы x_1 и x_2 не может подаваться 1, 1, так как соответствующего символа нет в $A_{вх}$, т. е. КА никогда не воспользуется последними четырьмя строками таблицы.

В дальнейшем, при реализации полученных булевых функций

термами, будем назначать значение 0 или 1 для каждой $*$, исходя из соображений экономичности или простоты построения.

Задачи для самостоятельного решения

Представить КА, заданный автоматной таблицей, в виде системы булевых функций.

1.

	q_0	q_1
0	a/q_1	c/q_0
1	b/q_0	a/q_1

2.

	q_0	q_1	q_2
0	$0/q_1$	$1/q_0$	$1/q_0$
1	$1/q_2$	$0/q_2$	$1/q_1$

3.

	q_0	q_1
0	$0/q_1$	$1/q_0$
1	$1/q_1$	$0/q_1$
2	$1/q_0$	$1/q_1$

4.

	q_0	q_1	q_2
0	$0/q_1$	$1/q_0$	$2/q_2$
1	$1/q_0$	$2/q_2$	$1/q_1$
2	$2/q_2$	$0/q_1$	$0/q_0$

5.

	q_0	q_1	q_2	q_3
0	a/q_3	c/q_0	e/q_3	g/q_0
1	b/q_2	d/q_1	f/q_1	h/q_3

6.

	q_0	q_1
0	a/q_1	b/q_0
1	b/q_0	c/q_1
2	c/q_0	a/q_1
3	a/q_1	b/q_0

7.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$0/q_5$	$2/q_6$	$1/q_3$	$0/q_4$	$2/q_4$	$1/q_4$	$0/q_1$
1	$1/q_3$	$0/q_2$	$2/q_1$	$1/q_0$	$0/q_4$	$2/q_6$	$1/q_2$