Ширяева Т.А.

Одна верхняя оценка нормального распределния в бесконечномерном пространстве

В середине 20 века было начато изучение вероятностных распределений в бесконечномерных пространствах. В настоящее время получено очень много результатов, касающихся бесконечмерных случайных величин. Тем не менее, что касается числовых оценок вероятностей, то их нахождение попрежнему остается достаточно сложной задачей. В частности, это относится и к нормальному распределению.

Введем основные определения [1].

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ - некоторое вероятностное пространство, B - вещественное банахово пространство, $\mathfrak{B}$ - некоторая σ - алгебра подмножеств B.

Определение 1. Измеримое отображение $\xi : \Omega \longrightarrow B$ называется бесконечномерной банаховозначной случайной величиной.

Определение 2. Вероятностным распределением $L(\xi)$ случайной величины ξ называют меру на $(B, \mathfrak{B})$, определенную формулой

$$L(\xi, A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A),$$

для любого $A \in \mathfrak{B}$. В частности, закон распределения ξ можно задавать следующим образом

$$L(\xi, f, r) = P(\omega \in \Omega : f(\xi(\omega)) < r),$$

где f - некоторый функционал, определенный на $B, r \in R$ (R - множество вещественных чисел). Если $f(x) = ||x||$- норма в банаховом пространстве B, то

$$L(\xi, f, r) = P(\omega \in \Omega : ||\xi(\omega)|| < r)$$

есть вероятность попадания в шар радиуса r в банаховом пространстве B.

Пусть B^* есть сопряженное с B простарство, то есть множество всех непрерывных линейных функционалов, определенных на B.

Определение 3. Банаховозначная случайная величина η называется нормально распределенной (нормальной), если для любого функционала $f \in B^*$ вещественная случайная величина $f(\eta)$ имеет нормальное распределение в R.

Для банаховозначных случайных величин определены математическое ожидание и ковариация. Существуют определения математического ожидания в смысле Гельфанда-Петтиса и в смысле Бохнера. Приведем первое определение.

Определение 4. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется элемент $E\xi \in B$, удовлетворяющий условию

$$E(f(\xi)) = \int_{\Omega} f(\xi(w)) P(d\omega)$$

для любого $f \in B^*$.

Определение 5. Ковариацией случайной величины $\xi \in B$ называется билинейная форма в пространстве B^* вида

$$cov\xi(f,g) = E(f(\xi - E\xi)g(\xi - E\xi))$$

для любых $f, g \in B^*$.

Определение 6. С ограниченной билинейной формой сопоставим представляющий эту форму ограниченный линейный оператор $Q : B^* \longrightarrow B^{**}$, определенный формулой

$$(Qf)(g) = cov\xi(f,g).$$

Оператор Q называется ковариационным оператором случайной величины ξ. B^{**} — пространство, сопряженное с B^*.

В дальнейшем будем рассматривать частный случай банахова пространства. Пусть B является гильбертовым пространством, то есть в нем определероно скалярное произведение.

Определение 7. Характеристическим функционалом случайной величины ξ называется функционал

$$\varphi_\xi(x) = Eexp\{i(\xi, x)\},$$

где $x \in B, (\xi, x)$ — скалярное произведение, $i = \sqrt{-1}$.

Если η — нормальная случайная величина, Q — ее ковариационный оператор, $E\eta = a$, то характеристический функционал имеет вид

$$\varphi_\eta(x) = exp\{i(a,x) - \frac{1}{2}(Q\eta, \eta)\}$$

Известно [1], что ковариационный оператор Q нормальной величины является ядерным и вполне непрерыврым, поэтому имеет ортонормированный базис собственных векторов $e_1, e_2, ...$ Пусть λ_k — собственные значения оператора Q, соответствующие собственным векторам $e_k, k = 1, 2...$

Рассмотрим задачу оценки вероятности того, что случайная нормальная величина из гильбертого пространства попадет в шар радиуса r, то есть $P(||\eta|| < r)$, где $r \geq 0$.

В работах [2,4] при оценках указанных вероятностей используются все значения λ_k оператора Q. Но λ_k, где $k \geq 1$ бесконечно много, поэтому применение этих оценок затруднительно.

В работе [3] было предложено использовать только максимальное значение λ_k. В настоящей работе предыдущая оценка немного уточняется.

Не уменьшая общности, полагаем, что $E\eta = 0$.

Теорема. Пусть λ_1 — максимальное собственное значение ковариационного оператора Q, а λ_2 - следующее за ним, то есть $\lambda_1 > \lambda_2$, тогда

$$P(||\eta|| < r) \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{r^2}} \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{(1 + (2t\lambda_1)^2)(1 + (2t\lambda_2)^2)}} sin(\frac{tr^2}{2}) dt$$

Доказательство теоремы основано на применении теоремы обращения. В результате использования приведенной теоремы можно проводить численные оценки. Значимость нормального распределения в бесконечномерных пространствах связана с тем, что при определенных условиях выполняются аналоги центральных предельных теорем.

Список литературы

[1] Гихман И.И.,Скороход А.В., *Теория случайных процессов. Том 1*, Москва,1971.

[2] Сытая Г.Н., *О некоторых асимптотических представлениях для гауссовской меры в гильбертовом простанстве.Случайные процессы*, Киев.Наукова думка.1974.

[3] Ширяева Т.А. *Оценка вероятностей попадания гауссова вектора в гильбертов шар.Статис- тическая метафизика*, Красноярск.2001,С.179-181.

[4] Розовский Л.В. *О гауссовской мере шаров в гильбертовом пространстве*, Теория вероятностей и применения.2008,№2,С.382-389.

Ширяева Т.А.
tassfu@mail.ru
Красноярский государственный
аграный университет
Кафедра бизнес-информатики