



DYNAMIC SYSTEMS AND COMPUTER SCIENCE  
**DYSC  
2023**



# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2023)

Материалы 5-й Международной конференции  
Иркутск, 18–23 сентября 2023 г.

ISBN 978-5-9624-2182-7

УДК 004  
ББК 32.973  
Д91

**Редакционная коллегия:**

*В. Г. Антоник*, канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. ред.)  
*А. В. Арзучинцев*, д-р физ.-мат. наук, проф.  
*М. В. Фалалеев*, д-р физ.-мат. наук, проф.

**Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023)**: материалы 5-й Международной конференции. Иркутск, 18–23 сентября 2023 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; [отв. ред. В. Г. Антоник]. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2023. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

<https://doi.org/10.26516/978-5-9624-2182-7.2023.1-228>

**ISBN 978-5-9624-2182-7**

Представлены материалы, отражающие качественные вопросы теории дифференциальных и операторных уравнений, управления динамическими системами и оптимизации, информационных технологий, теории дискретных функций, комбинаторных и стохастических проблем иерархических структур, прикладных задач математического и компьютерного моделирования.

Для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Иркутский государственный университет»

664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. +7 (3952) 51-19-00

Издательство ИГУ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124

тел. +7 (3952) 52-18-53; e-mail: [izdat@lawinstitut.ru](mailto:izdat@lawinstitut.ru)

Подписано к использованию 21.09.2023. Тираж 15 экз. Объем 6,1 Мб.

---

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше



**DYSC  
2023**



# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2023)

Материалы 5-й Международной конференции  
Иркутск, 18–23 сентября 2023 г.

ISBN 978-5-9624-2182-7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Иркутский государственный университет»  
Институт математики и информационных технологий



# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2023)

Материалы 5-й Международной конференции  
Иркутск, 18–23 сентября 2023 г.

ISBN 978-5-9624-2182-7





**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:  
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2023)  
Материалы 5-й Международной конференции**

**СОДЕРЖАНИЕ**

**ПРЕДИСЛОВИЕ** ..... 8

**1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И  
ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Буланов С. Г.**

Критерии устойчивости по Ляпунову систем линейных обыкновенных  
дифференциальных уравнений ..... 9

**Головко Е. А., Кацапова Н. С.**

Об одной многомерной эллиптической системе с младшими производными ..... 12

**Гончаров Н. С., Свиридюк Г. А.**

О разрешимости системы Вентцеля уравнений фильтрации жидкости в круге  
и на его границе ..... 15

**Гражданцева Е. Ю.**

Задача Коши частного случая управляемого движения жидкости в напорном  
трубопроводе ..... 17

**Гребенчиков Б. Г.**

Асимптотические свойства некоторых систем нейтрального типа с линейным  
запаздыванием ..... 20

**Дрегля Сидоров Л. Р. Д., Сидоров Н. А.**

Об одном классе нелинейных уравнений в банаховых пространствах с линейным  
функционалом и параметром ..... 22

**Загребина С. А., Сагадеева М. А.**

Об устойчивости нулевого решения нестационарной линеаризованной модели Хоффа ..... 26

**Замышляева А. А., Бычков Е. В.**

Исследование модифицированного уравнения Буссинеска с краевым условием  
Неймана и начальным условием Коши ..... 28

**Захарова И. В., Фалалеев М. В.**

О некоторых системах дифференциальных уравнений в частных производных  
с малым параметром в главной части ..... 32

**Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.**

Аналитические и численные решения с нулевым фронтом параболической  
системы реакция-диффузия ..... 36

**Леонтьев Р. Ю.**

О малых решениях нелинейных операторных уравнений с необратимым оператором  
в главной части ..... 40

**Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю.**

Гамильтонов формализм для жестких и мягких возмущений в плазме  
с неабелевым взаимодействием ..... 44

**Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю.**

О точном решении уравнений эволюции для двух взаимодействующих узких волновых пакетов, распространяющихся в неабелевой плазме ..... 48

**Муратов В. А., Сидоров Д. Н., Тында А. Н.**

Идентификация нелинейных динамических систем на основе рядов Вольтерра с использованием многочленов Чебышева ..... 52

**Николаева Н. Г., Гаврилова О. В., Манакова Н. А.**

Исследование морфологии фазового пространства и вопроса неединственности решения задачи Шоултера - Сидорова для математической модели Хоффа ..... 55

**Петренко П. С.**

О дифференциально-алгебраических уравнениях с гистерезисом ..... 59

**Солодуша С. В., Кокконова Ю. И.**

Задача идентификации входного сигнала нестационарных динамических систем ..... 63

**Noeiaghdam S., Sidorov D. N.**

Application of the CESTAC method and CADNA library to control the accuracy of fuzzy Volterra integral equations with discontinuous kernel ..... 66

**2. УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И ОПТИМИЗАЦИЯ****Абдуллаев А. А., Мансимов К. Б.**

Об одной негладкой задаче оптимального управления интегральными уравнениями Вольтерра ..... 69

**Алиева С. Т., Мансимов К. Б.**

Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления дробного порядка ..... 72

**Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.**

Оптимальное управление каскадной парой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием в классе гладких управляющих функций ..... 74

**Барсегян В. Р., Солодуша С. В.**

Задача оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал ..... 78

**Булдаев А. С., Казьмин И. Д.**

Об одном подходе к поиску особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке ..... 82

**Дмитрук Н. М., Костюкевич Д. А.**

Многokrратно замыкаемые стратегии в задачах оптимального гарантированного управления, связанных с теорией управления по прогнозирующей модели ..... 86

**Дресвянская Н. В., Хамисов О. В.**

Методы кусочно-линейных опорных функций в линейном двухуровневом программировании ..... 90

**Дыхта В. А.**

Общий позиционный принцип минимума с нелинейными опорными мажорантами для дискретных задач оптимального управления ..... 92

**Керимбеков А. К., Абдылдаева Э. Ф.**

Об особенностях задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при распределенном и граничном векторных управлениях ..... 96

**Мансимзаде А. Ф., Мансимов К. Б.**

Об одной негладкой задаче оптимального управления с переменной структурой ..... 99

<b>Мансимов К. Б., Алиев К. М.</b> Об одной задаче оптимального управления для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями .....	102
<b>Мансимов К. Б., Керимова А. В.</b> Об оптимальности особых управлений в ступенчатой задаче управления разностным уравнением типа Вольтерра .....	105
<b>Мансимов К. Б., Сулейманова Ш. Ш.</b> Некоторые необходимые условия оптимальности в одной задаче управления с переменной структурой, описываемой двумя системами Гурса – Дарбу с многоточечным критерием качества .....	109
<b>Марданов М. Дж., Гулиев Г. Ф., Тагиев Х. Т.</b> Задача оптимального управления для неустойчивого гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным граничным условием .....	112
<b>Масталиев Р. О.</b> К оптимальным процессам в стохастических дискретных управляемых системах .....	116
<b>Минарченко И. М.</b> Поиск равновесия по Нэшу в невогнутой квадратичной игре .....	118
<b>Моржин О. В.</b> Об оптимизации когерентного и некогерентного управлений в некоторых открытых квантовых системах .....	122
<b>Овсянников А. Д.</b> Терминальная задача совместной оптимизации программного и возмущенных движений ..	124
<b>Овсянников Д. А., Котина Е. Д.</b> О некоторых задачах программного управления пучком траекторий .....	126
<b>Самсонок О. Н.</b> Применение составных функций типа Ляпунова в задачах оптимального импульсного управления .....	129
<b>Срочко В. А., Антоник В. Г.</b> Решение линейно-квадратичных задач в дискретно-непрерывном формате .....	133
<b>Трунин Д. О., Федоров А. Ю.</b> Об одном подходе к улучшению управления в системах с ограничениями на основе задачи о неподвижной точке .....	137
<b>Guliyev H. F., Seyfullayeva Kh. I.</b> Determination the right hand side of the linear equation of oscillations of plate-like constructions .....	141

### **3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ. КОМБИНАТОРНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР**

<b>Балагура А. А., Кузьмин О. В.</b> Частично упорядоченные множества и обобщенные пирамиды Паскаля .....	144
<b>Башмаков С. И., Смелых К. А.</b> Многоагентная логика деревьев вычислений STLK .....	147
<b>Благовещенская Е. А.</b> Комбинаторные методы в теории прямых разложений абелевых групп без кручения .....	149

<b>Захарченко В. С., Тюрнева Т. Г.</b> Моделирование тестов в LMS Moodle как инструмент управления образовательным процессом в университете .....	151
<b>Кириченко К. Д., Ткаченко Э. П.</b> Алгоритм построения случайных строк по заданному регулярному выражению .....	154
<b>Кузьмин О. В., Стрихарь М. В.</b> Композиции чисел с ограничениями и иерархическая структура плоских сечений пирамиды Паскаля .....	157
<b>Муценек В. Е.</b> К вопросу о доверии в системах симбиотического интеллекта на основе нейросетей .....	160
<b>Насибулин А. А., Казимиров А. С.</b> Автоматизация работы репозитория с программным обеспечением .....	163
<b>Полухин П. В.</b> Оценка правдоподобия структуры байесовской сети на основе принципа максимума энтропии .....	166
<b>Попова В. А.</b> Разработка правил для выявления ошибок несоответствия типов выражений в языке программирования «1С:Предприятие» .....	169
<b>Растёгин А. Э., Шемет А. М.</b> Квантовый поиск с разрушающей сцепленностью каналом обращения к оракулу .....	173
<b>Шаранхаев И. К.</b> Об элементах решетки ультраклонов .....	177
<b>Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Шлепкин А. А., Филиппов К. А.</b> О системах линейных уравнений и конечных суммах .....	180
 <b>4. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ</b>	
<b>Аргучинцев А. В., Копылов Д. Е.</b> О численном решении задачи разделения смесей в ректификационной колонне .....	183
<b>Буров А. А., Никонов В. И.</b> Мультипольное представление гравитационного потенциала малого небесного тела .....	187
<b>Буров А. А., Никонова Е. А.</b> Аппроксимация поля притяжения твердого тела полем притяжения четырех одинаковых точечных масс .....	191
<b>Вшивков Ю. Ф., Хойлов В. В.</b> Исследование параметров гидравлической системы на основе компьютерного моделирования .....	195
<b>Кривель С. М., Спасибко А. Б.</b> Алгоритмическое и программное обеспечение системы поддержки проектирования объектов с учетом требуемых характеристик их надежности .....	197
<b>Лукьянцев Д. С., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б., Чудаев С. О.</b> Математическое моделирование рефракции электромагнитных волн в гравитационном поле .....	201
<b>Лукьянцев Д. С., Зотова И. А., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б.</b> Гравитационное микролинзирование света в динамической системе экзопланета-звезда .....	205



**Сидлер И. В.**

О численном решении начально-краевой задачи для гиперболической системы в модели гидравлического удара.....209

**Ульянова Н. Ю.**

Модель оптимизации работы энергетических источников ..... 213

**Хамисов О. О.**

Иерархическое регулирование частоты и потоков мощности в сетях с низкой инерцией .. 217

**Шеломенцева Н. Н.**

Многокритериальная задача в жилищном строительстве.....221

**Liu Song, Sidorov D. N.**

Neural Network Fusion Optimization for Photovoltaic Power Forecasting.....223

**Vo Van Truong, Sidorov D. N.**

Prediction interval for solar photovoltaic power using ARIMAX model .....225



**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:  
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (DYSC 2023)  
Материалы 5-й Международной конференции**

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Сборник содержит тексты докладов, представленных на 5-ю международную конференцию «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (г. Иркутск, Иркутский государственный университет, 18–23 сентября 2023 г.). Данная серия конференций проводится ежегодно, начиная с 2019 г.

В программу настоящей конференции включены доклады ученых из 12 регионов России, а также ряда зарубежных стран.

Сборник состоит из 4 частей, содержащих доклады соответствующих секций: «Качественные вопросы теории дифференциальных и операторных уравнений», «Управление динамическими системами и оптимизация», «Информационные технологии. Теория дискретных функций. Комбинаторные и стохастические проблемы иерархических структур», «Прикладные задачи математического и компьютерного моделирования». Пленарные доклады включены в соответствующие секции. Тексты докладов публикуются в авторской редакции. Лишь в отдельных случаях редакционная коллегия позволила себе внести необходимые лексические и грамматические правки.

Предназначается для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

*Редакционная коллегия:*

канд. физ.-мат. наук, доц. Антоник В. Г. (ответственный редактор);

д-р физ.-мат. наук, проф. Аргучинцев А. В.;

д-р физ.-мат. наук, проф. Фалалеев М. В.



## КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Представлены необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерии получены в мультипликативной, аддитивной форме и позволяют определить характер устойчивости по поведению правой части системы. Форма критериев допускает возможность программной реализации, что влечет компьютеризацию анализа устойчивости по Ляпунову систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

**AMS Subject Classification:** 34D20

- 1. Введение.** Анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) остается актуальной задачей в различных областях современной науки и техники [1]. В частности для анализа устойчивости статистических систем с обратной связью используются условия в виде матричных неравенств [2]. Актуальным направлением исследований является разработка методов анализа устойчивости систем линейных обобщенных ОДУ с переменными коэффициентами [3]. Классические методы в ряде случаев сводят анализ устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений общего вида к оценке устойчивости линейных систем. Потребность выполнять анализ устойчивости систем ОДУ в режиме реального времени влечет необходимость разработки компьютеризируемых методов.
- 2. Анализ устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Рассматривается задача Коши для системы линейных ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения в области  $R : \{ t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0 \}$ . Элементы матрицы  $A(t)$  определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы в  $R$ . На основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования величина возмущения для  $\forall t \in [t_0, \infty)$  определяется из соотношения [4]

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0).$$

Отсюда автоматически следуют критерии устойчивости и асимптотической устойчивости систем линейных ОДУ в мультипликативной форме

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) \right\| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) \right\| = 0. \quad (3)$$

В результате равносильных преобразований критерии (2), (3) приводятся к аддитивной форме [4]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h A(t_{i-\ell}) \leq \tilde{C}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h A(t_{i-\ell}) = (-\infty), \quad (5)$$

где  $\tilde{C}_1$  – постоянная матрица, под символом  $(-\infty)$  понимается предел матрицы, элементы которой стремятся к  $-\infty$ .

Критерии (2) – (5) ориентированы на программную реализацию и позволяют установить характер устойчивости систем линейных ОДУ в режиме реального времени. При этом в частности не требуется построение функций Ляпунова, информации о характеристических числах и характеристических показателях.

Далее ставится задача получить критерии устойчивости системы (1) по характеру поведения правой части системы в рассматриваемых условиях без дополнительных ограничений. В [5, 6] конструируются критерии устойчивости нулевого решения нелинейной системы ОДУ по характеру поведения правой части.

Рассмотрим нелинейную систему ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (6)$$

Предполагается, что в области  $R_1 : \{ t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_1, \delta_1 > 0 \}$  для (6) выполнены все условия существования и единственности решения и функция  $F(t, Y)$  определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $t$ , компоненты этой функции удовлетворяют неравенству  $|f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y})| \leq L |y_k - \tilde{y}_k|$ ,  $L = \text{const}$ ,  $\forall t \in [t_0, \infty)$ ,  $\forall (t, Y), (t, \tilde{Y}) \in R_1$ ,  $\forall k \in \overline{1, n}$ . Для устойчивости решения системы (6) достаточно существование  $\Delta$ ,  $0 < \Delta \leq \delta_1$ , такого что  $\forall \tilde{Y}(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$  выполняется соотношение

$$\left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} \right| \leq \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = \text{const} \quad (7)$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), \quad f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало  $\Delta_1 \leq \Delta$ , такое что  $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$  влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} \right| = 0, \quad f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (8)$$

Если  $\forall \tilde{Y}(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$  дополнительно потребовать выполнение неравенства

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{f'_k(t, \tilde{Y}) - f'_k(t, Y)}{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)} dt - \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} dt \right| \leq c_0 \quad (9)$$

$c_0 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty) \quad \forall k \in \overline{1, n}$  то критерии (7), (8) будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости.

Для линейной системы ОДУ критерии (7), (8) выполняются с необходимостью без дополнительных требований.

**Теорема 1.** *В рассматриваемых условиях для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало  $\Delta_2$ ,  $0 < \Delta_2 \leq \delta$ , такое, что  $\forall \tilde{Y}(t), \tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$ , при условии  $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2$  выполняется неравенство*

$$\left| \frac{a_{k1}(t) (\tilde{y}_1(t) - y_1(t)) + \dots + a_{kn}(t) (\tilde{y}_n(t) - y_n(t))}{a_{k1}(t) (\tilde{y}_1(t_0) - y_1(t_0)) + \dots + a_{kn}(t) (\tilde{y}_n(t_0) - y_n(t_0))} \right| \leq \tilde{c}_3, \quad \tilde{c}_3 = \text{const}, \quad (10)$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1, n}.$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало  $\Delta_3 \leq \Delta_2$ , такое, что  $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_3$  влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k1}(t) (\tilde{y}_1(t) - y_1(t)) + \dots + a_{kn}(t) (\tilde{y}_n(t) - y_n(t))}{a_{k1}(t) (\tilde{y}_1(t_0) - y_1(t_0)) + \dots + a_{kn}(t) (\tilde{y}_n(t_0) - y_n(t_0))} \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (11)$$

Получена еще одна разновидность критериев устойчивости систем линейных ОДУ, которая не требует преобразования правой части системы и обращения к методам качественной теории.

Предложенный подход допускает конструировать критерии устойчивости для производных правой части системы (1) произвольного порядка  $\ell \geq 2$  без дополнительных ограничений, если эти производные существуют.

**3. Заключение.** Представлены критерии устойчивости (10), (11) по Ляпунову систем линейных ОДУ в форме необходимых и достаточных условий. Критерии получены на основе рекуррентных преобразования разностных схем численного интегрирования при ограничениях общего вида. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага решения. Программная реализация критериев влечет возможность компьютеризации анализа устойчивости по Ляпунову систем линейных ОДУ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланов С. Г. Необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. № 224. С. 10–18.
2. Григорян Г. А. Критерий устойчивости систем двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Математические заметки. 2018. 103, № 6. С. 831–840.
3. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 7. С. 42–60.
4. Ромм Я. Е. О необходимых и достаточных условиях устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. 2022. № 2. С. 92–109.
5. Ashordia M. Lyapunov stability of systems of linear generalized ordinary differential equations // J. Comput. Math. Appl. 2005. 50. С. 957–982.
6. Peixoto Marcia L. C., Pessim Paulo S. P., Lacerda Marcio J., Palhares Reinaldo M. Stability and stabilization for LPV systems based on Lyapunov functions with non-monotonic terms // Journal of the Franklin Institute. 2020. 357, № 11. С. 6595–6614.

Буланов Сергей Георгиевич

Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО РГЭУ (РИНХ)

E-mail: bulanovtspi@mail.ru



## ОБ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2023 г. Е. А. ГОЛОВКО, Н. С. КАЦАПОВА

**Аннотация.** Рассмотрена задача Дирихле для одной многомерной эллиптической системы, содержащей младшие производные, с помощью преобразования Фурье. Показано, что, в отличие от одного эллиптического уравнения, младшие члены существенно влияют на разрешимость первой краевой задачи для эллиптических систем уравнений. Задача сводится к исследованию одного уравнения второго порядка. В зависимости от того, к какому типу это уравнение относится, меняется характер разрешимости исходной задачи.

**Ключевые слова:** эллиптические системы, первая краевая задача, задача Дирихле, младшие производные, преобразование Фурье.

**AMS Subject Classification:** 35J57

В настоящее время еще не достаточно полно изучена разрешимость классических граничных задач для многомерных эллиптических систем. В случае одного эллиптического уравнения второго порядка только от главных частей зависит фредгольмовость задачи Дирихле [1]. В общем случае для эллиптических систем встречаются новые явления в характере разрешимости первой краевой задачи, не имеющие аналогов в случае одного уравнения второго порядка. Среди таких явлений следует отметить эффект влияния младших производных на разрешимость граничных задач. Эти вопросы рассматривались в работах А.И. Янушаускаса и его учеников [2], [3], [4].

В настоящей работе изучается эффект влияния младших производных для одного класса эллиптических систем. В трехмерном пространстве рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + ku_x + nu_y &= 0; \\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + kv_x + nv_y &= 0; \\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) + kw_x + nw_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$  – неизвестные функции,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, k$  и  $n$  – некоторые параметры. Введем обозначения:

$$u_x + v_y + w_z = H.$$

Тогда систему (1) можно переписать так

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x} + ku_x + nu_y &= 0; \\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial y} + kv_x + nv_y &= 0; \\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial H}{\partial z} + kw_x + nw_y &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (2) по  $x$ , второе – по  $y$ , третье – по  $z$  и сложим результаты дифференцирований. Учитывая введенное обозначение, получим

$$(\lambda_1 - 1)H_{xx} + (\lambda_2 - 1)H_{yy} + (\lambda_3 - 1)H_{zz} + kH_x + nH_y = 0. \quad (3)$$

Далее будем использовать преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$ . Пусть  $\tilde{u}(\xi, \eta, z), \tilde{v}(\xi, \eta, z), \tilde{w}(\xi, \eta, z), \tilde{H}(\xi, \eta, z)$  – преобразования Фурье функций  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z), H(x, y, z)$  соответственно. В терминах преобразования Фурье уравнение (3) примет вид

$$\tilde{H}_{zz} - \mu^2 \tilde{H} = 0, \quad (4)$$

где

$$\mu^2 = \frac{\xi^2(\lambda_1 - 1) + \eta^2(\lambda_2 - 1) - i\xi k - i\eta n}{\lambda_3 - 1}. \quad (5)$$

Все ограниченные на бесконечности решения уравнения (4) даются формулой

$$\tilde{H}(\xi, \eta, z) = C(\xi, \eta)e^{-\mu z}, \quad (6)$$

где  $C(\xi, \eta)$  – произвольная функция.

Применим преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$  к системе (2)

$$\begin{aligned} (\xi^2 + \eta^2)\tilde{u} - \tilde{u}_{zz} + i\xi k\tilde{u} + i\eta n\tilde{u} &= -i\xi\lambda_1\tilde{H}; \\ (\xi^2 + \eta^2)\tilde{v} - \tilde{v}_{zz} + i\xi k\tilde{v} + i\eta n\tilde{v} &= -i\eta\lambda_2\tilde{H}; \\ (\xi^2 + \eta^2)\tilde{w} - \tilde{w}_{zz} + i\xi k\tilde{w} + i\eta n\tilde{w} &= -\lambda_3\tilde{H}_z. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\xi^2 + \eta^2 + i\xi k + i\eta n = \rho^2, \quad (7)$$

и учитывая (6), получим

$$\begin{aligned} -\tilde{u}_{zz} + \rho^2\tilde{u} &= -i\xi\lambda_1e^{-\mu z}C(\xi, \eta), \\ -\tilde{v}_{zz} + \rho^2\tilde{v} &= -i\eta\lambda_2e^{-\mu z}C(\xi, \eta), \\ -\tilde{w}_{zz} + \rho^2\tilde{w} &= \lambda_3\mu e^{-\mu z}C(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (8)$$

Каждое уравнение системы (8) содержит только одну неизвестную функцию. Ограниченные на бесконечности решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= A_1(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\xi\lambda_1C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2}(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \\ \tilde{v} &= A_2(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\eta\lambda_2C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2}(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \\ \tilde{w} &= A_3(\xi, \eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3\mu C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2}(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A_1(\xi, \eta)$ ,  $A_2(\xi, \eta)$ ,  $A_3(\xi, \eta)$  – произвольные функции.

Итак, общее решение системы (8) дается формулами (9) и содержит четыре произвольных функции  $A_1(\xi, \eta)$ ,  $A_2(\xi, \eta)$ ,  $A_3(\xi, \eta)$ ,  $C(\xi, \eta)$ .

Для системы (1) рассмотрим задачу Дирихле: в полупространстве  $\{z > 0\}$  найти решение системы (1), удовлетворяющее на границе этого полупространства условиям

$$\begin{aligned} u|_{z=0} &= f_1(x, y), \\ v|_{z=0} &= f_2(x, y), \\ w|_{z=0} &= f_3(x, y), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $f_1, f_2, f_3$  – заданные, достаточно гладкие функции.

Поскольку решение системы мы получили в терминах преобразования Фурье, применим к граничным условиям (10) преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned} \tilde{u}|_{z=0} &= \tilde{f}_1(\xi, \eta), \\ \tilde{v}|_{z=0} &= \tilde{f}_2(\xi, \eta), \\ \tilde{w}|_{z=0} &= \tilde{f}_3(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим решение (9) в условия (11)

$$\begin{aligned} \tilde{u}|_{z=0} &= A_1(\xi, \eta) = \tilde{f}_1(\xi, \eta), \\ \tilde{v}|_{z=0} &= A_2(\xi, \eta) = \tilde{f}_2(\xi, \eta), \\ \tilde{w}|_{z=0} &= A_3(\xi, \eta) = \tilde{f}_3(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Таким образом, функции  $A_1(\xi, \eta)$ ,  $A_2(\xi, \eta)$ ,  $A_3(\xi, \eta)$  определились из граничных условий задачи. Определим  $C(\xi, \eta)$  используя условие связи  $u_x + v_y + w_z = H$ , предварительно применив к нему преобразование Фурье

$$i\xi\tilde{u} + i\eta\tilde{v} + \tilde{w}_z = \tilde{H}. \quad (12)$$

Подставим решения (6) и (9) в условие (12). После преобразований получим уравнение



$$C(\xi, \eta)((1 - \lambda_3)^2 \mu^2 - \rho^2) = (\mu - \rho)((1 - \lambda_3)\mu + \rho)(\rho \tilde{f}_3 - i\eta i \tilde{f}_2 - i\xi \tilde{f}_1)$$

Правая часть этого уравнения – известная функция, выражающаяся через граничные функции  $f_i$ . Обозначим

$$\tilde{g} = (\mu - \rho)((1 - \lambda_3)\mu + \rho)(\rho \tilde{f}_3 - i\eta i \tilde{f}_2 - i\xi \tilde{f}_1).$$

И пусть  $C(\xi, \eta)$  есть преобразование Фурье некоторой функции  $\omega$ , т.е.  $C(\xi, \eta) = \tilde{\omega}$ . Учитывая введенные обозначения и соотношения (5) и (7), последнее уравнение преобразуется к виду

$$\tilde{\omega}[(\lambda_3 - 1)(\lambda_1 - 1)\xi^2 + (\lambda_3 - 1)(\lambda_2 - 1)\eta^2 - (\lambda_3 - 1)i\xi k - \xi^2 - \eta^2 - i\xi k - i\eta n] = \tilde{g}.$$

Применяя к нему обратное преобразование Фурье, получим

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1))\omega_{xx} + (\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1))\omega_{yy} - \lambda_3(k\omega_x + n\omega_y) = g(x, y). \quad (13)$$

Это уравнение с частными производными второго порядка мы будем рассматривать во всем пространстве переменных  $x, y$ . Если коэффициенты при старших производных будут равны нулю, т.е.

$$\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1) = 0, \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1) = 0,$$

то уравнение (13) примет вид

$$k\omega_x + n\omega_y = g(x, y)/\lambda_3.$$

Если функция  $g(x, y)$  интегрируема по  $x$  и по  $y$  в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то это уравнение, а, следовательно, и рассматриваемая задача ((1), (10)) имеет решение, зависящее от одной произвольной функции. При этом необходимо требовать повышенной гладкости от граничных условий (10).

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (13) отличен от нуля, то это уравнение может относиться к разным типам. В зависимости от этого характер разрешимости исходной задачи будет меняться. Доказана теорема

**Теорема 1.** *Младшие производные существенно влияют на разрешимость задачи Дирихле для многомерных эллиптических систем. Характер разрешимости рассматриваемой задачи зависит от вида уравнения (13), которое рассматривается в пространстве переменных  $x, y$ .*

*Если выполняется условие*

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1))(\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)) > 0,$$

*то задача Дирихле для системы (1) имеет единственное решение, если же*

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1))(\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)) \leq 0,$$

*то однородная задача Дирихле для системы (1) ограниченных на бесконечности решений не имеет.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1977.
2. Руткаускас С. О задаче типа Дирихле для эллиптических систем с вырождением на прямой // Математические заметки. 2016. 100, № 2. С. 270–278.
3. Халилов Ш.Б. Задача Дирихле для эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2006. 42, № 3. С. 416–422.
4. Янушаускас А. И. Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1997. 200 с.

Головко Елена Анатольевна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: elena-golovko@mail.ru

Кацапова Наталия Сергеевна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: nataliakacanova@list.ru



## О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В КРУГЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

© 2023 г. Н. С. ГОНЧАРОВ, Г. А. СВИРИДЮК

**Аннотация.** Целью исследования является анализ стохастической системы Вентцеля уравнений фильтрации в круге и на его границе в пространстве дифференцируемых К-«шумов». В частности, доказано существование и единственность решения, которое определяет количественные прогнозные изменения геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации, протекающей на границе двух сред (в области и на ее границе).

**Ключевые слова:** система Вентцеля, уравнение фильтрации, производная Нельсона – Гликлиха, краевые условия Вентцеля.

**AMS Subject Classification:** 35G15

**1. Постановка задачи.** Фильтрация жидкости, как и ее течение, диффузия, падение и т. д. является одним из процессов влагопереноса. Исследование этих процессов начинается с изучения их математических моделей. Рассмотрим одну из математических моделей фильтрации. Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – связная ограниченная область с границей  $\Gamma$  класса  $C^\infty$ . На компакте  $\Omega \cup \Gamma$  задана система уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной [1], моделирующая процесс фильтрации жидкости

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + \beta u, \quad u = u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad (1)$$

$$(\lambda - \Delta)v_t = \gamma \Delta v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta v, \quad v = v(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (2)$$

$$tru = v, \quad \text{на } \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (3)$$

Здесь символом в (1) обозначен оператор Лапласа в области  $\Omega$ , а в (2) тем же символом обозначен оператор Лапласа – Бельтрами на гладком римановом многообразии  $\Gamma$ . Символом  $\nu = \nu(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ , обозначена внешняя по отношению к  $\mathbb{R} \times \Gamma$  нормаль к  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Параметры  $\alpha, \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  характеризуют среду.

Ранее [4] мы, следуя традиции [2] – [5], условие вида (2), в котором порядок производных по пространственным переменным не ниже порядка по тем же в (1), называли краевым условием Вентцеля. Однако намереваясь в будущем рассматривать различные случаи  $\Omega$  и  $\Gamma$  (например,  $\Omega$  – ограниченное связное риманово многообразие с краем  $\Gamma$ ) считаем необходимым называть (1), (2) системой уравнений, пусть и заданных на множествах разной геометрической размерности. В поддержку этого говорит тот факт, что уравнения (1), (2) описывают один и тот же физический процесс фильтрации жидкости. Термин же «краевые условия» следует оставить за уравнениями, заданными на границе (краю) области (многообразия) и имеющих меньший порядок производных по пространственным переменным (см. классический трактат [7], а также [6]). Название система уравнений Вентцеля подчеркивает заслуги первооткрывателя [8] нового раздела математической физики.

Разрешимость системы (1), (2) будем изучать в самом простом случае:  $\Omega = \{(r, \theta) : r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi)\}$  – круг, а  $\Gamma = \{\theta : \theta \in [0, 2\pi)\}$  – окружность. В этом случае (1), (2) преобразуются к виду

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta})u_t = \alpha \Delta_{r,\theta} u + \beta u, \quad u = u(t, r, \theta), \quad (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad (4)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta)v_t = \gamma\Delta_\theta v + \partial_R u + \delta v, \quad v = v(t, \theta), \quad (t, \theta) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{r,\theta} = (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left( (R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0}.$$

К данной системе присовокупим условие согласования (3) и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta) = u_0(r, \theta) \quad v(0, \theta) = v_0(\theta). \quad (6)$$

Целью нашей работы является показать разрешимость системы Вентцеля уравнений фильтрации в круге и на его границе. В первой части рассматривается существование и единственность системы Вентцеля уравнений в круге и на его границе. Во второй части проводятся абстрактные рассуждения, заключающиеся в построении пространства и доказательства существования и единственности стохастической системы Вентцеля уравнений в круге и на его границе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barenblatt G. I., Zheltov Iu. P., Kochina I. N.* Sobolev type equations and degenerate semigroups of operator // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1960. 24, № 5. С. 1286–1303.
2. *Favini A., Sviridyuk G. A., Manakova N. A.* Linear sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of noises // *Abstract and Applied Analysis.* 2015. 2015. С. 8.
3. *Favini A., Sviridyuk G. A., Zamyshlyeva A. A.* One class of sobolev type equations of higher order with additive “white noise” // *Communications on Pure and Applied Analysis.* 2016. 15, № 1. С. 185–196.
4. *Goncharov N. S., Zagrebina S. A., Sviridyuk G. A.* Non-uniqueness of solutions to boundary value problems with Wentzell condition // *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software.* 2021. 14, № 4. С. 102–105.
5. *Goncharov N. S.* Stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina model on the interval with Wentzell boundary conditions // *Global and Stochastic Analysis.* 2020. 7, № 1. С. 11–23.
6. *Goncharov N. S., Sviridyuk G. A., Zagrebina S. A.* The Showalter – Sidorov and Cauchy problems for the linear Dzekzer equation with Wentzell and Robin boundary conditions in a bounded domain // *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* 2022. 14, № 1. С. 50–63.
7. *Lions J. L., Magenes E.* *Problems aux limites non homogenes et applications.* Paris : Dunod, 1968.
8. *Wentzell A. D.* *On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes* // *Theory of Probability and its Applications.* 1959. 4. С. 164–177.

Гончаров Никита Сергеевич

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))

E-mail: [Goncharov.NS.krm@yandex.ru](mailto:Goncharov.NS.krm@yandex.ru)

Свиридюк Георгий Анатольевич

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))

E-mail: [sviridyukga@susu.ru](mailto:sviridyukga@susu.ru)



## ЗАДАЧА КОШИ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАПОРНОМ ТРУБОПРОВОДЕ

© 2023 г. Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА

Аннотация. Показано решение задачи Коши гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей один из частных случаев управляемого движения воды в напорном трубопроводе.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, частные производные, задача Коши.

**AMS Subject Classification:** 35L02, 35L60

**1. Введение.** Математические модели переходных процессов в трубопроводах описываются с помощью уравнений в частных производных гиперболического типа. Среди задач на основе этих моделей весьма актуальна задача гидравлического удара, которая ставится с помощью начальных и краевых условий. Исследование гиперболических систем и гиперболических уравнений, изучение общих свойств нелинейных уравнений в частных производных и методов их решения представляет собой развивающуюся область современной математики. Хочется отметить, что библиография, посвященная изучению процессов, описываемых нелинейными уравнениями или системами нелинейных дифференциальных уравнений обширна, с ней можно ознакомиться, например, в работах [1–11] и библиографических ссылках к ним. Как правило, все попытки найти решение сводятся к применению численных методов. Однако наличие нерешенных вопросов, связанных с быстродействием и надежностью процедур расчета динамических характеристик приводят к задаче модификации существующих и развития новых способов получения точных решений. Данная работа посвящена построению точного решения задачи Коши линейной неоднородной гиперболической системы дифференциальных уравнений 1-го порядка описывающей частный случай управляемого движения воды в напорном трубопроводе.

**2. Решение задачи Коши ...** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка вида

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial l} + a \frac{\partial p}{\partial t} = f_1(l, t), \\ \frac{\partial p}{\partial l} + c \frac{\partial x}{\partial t} = f_2(l, t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(l, 0) = \varphi(l), \quad p(l, 0) = \psi(l), \quad (2)$$

где  $x = x(l, t)$  и  $p = p(l, t)$  – неизвестные функции достаточной гладкости (характеризуют массовый расход и давление жидкости, соответственно),  $l$  и  $t$  – независимые переменные, причем  $l \in [0, L]$ ,  $L \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \geq 0$  ( $l$  является пространственной переменной,  $t$  – время),  $a$  и  $c$  – действительные числа не равные нулю такие, что  $ac > 0$  (это обеспечивает гиперболичность рассматриваемой системы),  $f_{1,2}(l, t)$  – интегрируемы по второй переменной (описывают управляющее воздействие на процесс),  $\varphi(l)$ ,  $\psi(l)$  – непрерывны со значениями в  $\mathbb{R}$ .

---

Работа выполнена при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

**Теорема 1.** Пусть функции  $f_i(l, t), i = 1, 2$ , со значениями в  $R$ , определены на множестве  $D = \{(l, t) : l \in [0, L], t \geq 0, L \in R_+\}$  и интегрируемы по переменной  $t$ , функции  $\varphi(l)$  и  $\psi(l)$ , со значениями в  $R$ , определены и непрерывны  $\forall l \in [0, L]$  ( $l \in R_+$ ), а  $a$  и  $c$  – действительные числа не равные нулю такие, что  $ac > 0$ .

Тогда задача (1)–(2) имеет решение вида

$$x(l, t) = \frac{1}{2} \left( \varphi\left(l - \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) + \varphi\left(l + \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left( \psi\left(l - \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) - \psi\left(l + \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) \right) + F_1(l, t), \quad (3)$$

$$p(l, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left( \varphi\left(l - \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) - \varphi\left(l + \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) \right) + \frac{1}{2} \left( \psi\left(l - \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) + \psi\left(l + \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) \right) + F_2(l, t), \quad (4)$$

где

$$F_1(l, t) = \int_0^t \left( \frac{f_2\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right) + f_2\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right)}{2c} + \frac{f_1\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right) - f_1\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right)}{2\sqrt{ac}} \right) d\tau, \quad (5)$$

$$F_2(l, t) = \int_0^t \left( \frac{f_2\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right) - f_2\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right)}{2\sqrt{ac}} + \frac{f_1\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right) + f_1\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right)}{2a} \right) d\tau. \quad (6)$$

**3. Пример.** Найти решение задачи Коши для системы

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial l} + a \frac{\partial p}{\partial t} = lt, \\ \frac{\partial p}{\partial l} + c \frac{\partial x}{\partial t} = t, \end{cases}$$

при выполнении условий

$$x(l, 0) = l^2, \quad p(l, 0) = l,$$

Решение. Здесь

$$f_1(l, t) = lt, \quad f_2(l, t) = t, \quad \varphi(l) = l^2, \quad \psi(l) = l,$$

Тогда

$$f_1\left(l \pm \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right) = \left(l \pm \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\tau, \quad f_2\left(l \pm \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau\right) = \tau, \quad \varphi\left(l \pm \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) = \left(l \pm \frac{t}{\sqrt{ac}}\right)^2, \quad \psi\left(l \pm \frac{t}{\sqrt{ac}}\right) = l \pm \frac{t}{\sqrt{ac}}.$$

Следовательно, согласно формул (3)–(6)

$$\begin{aligned} x(l, t) &= l^2 - \frac{t}{c} + \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{2c}\right)t^2 - \frac{t^3}{6ac}, \\ p(l, t) &= l - \frac{2lt}{a} + \frac{lt^2}{2a}. \end{aligned}$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2001. № 12. С. 45–53.
2. Гражданцева Е. Ю., Солодуша С. В. Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных // Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA - 2022). 2022. С. 42-44.
3. Картвелишвили Л. Н. Принципы расчета гидравлического удара и их развитие /// Природоустройство. 4, 2012. С. 72-77.

4. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2008. 44, № 3. С. 394–407.
5. *Новицкий Н. Н., Сеннова Е. В., Сухарев М. Г. и др.* Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. Новосибирск : Наука, 2000. 273 с.
6. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.
7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их применение в газовой динамике. М. : Наука, 1978. 688 с.
8. *Тарасевич В. В.* Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 2017. 229 с.
9. *Фокс Д. А.* Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. М. : Энергоиздат, 1981. 248 с.
10. *Assanova A. T., Zholamankyzy A.* Problem with Data on the Characteristics for a loaded System of Hyperbolic Equations // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021. 31, № 3. С. 353–364.
11. *Grazhdantseva E. Y., Solodusha S. V.* On a hyperbolic system of equations in the problem of unsteady fluid motion // Journal of Physics: Conference Series. Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC). 2020 2021. 1847.

Гражданцева Елена Юрьевна

Иркутский государственный университет (ИГУ),

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: grelyur@mail.ru



## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. Б. Г. ГРЕБЕНЩИКОВ

**Аннотация.** Потводятся результаты исследования систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа, содержащих линейное запаздывание. Исследуются асимптотические свойства этих систем, при этом предполагается, что поведение решения систем зависит от свойств решений систем без нейтральных членов в правой части рассматриваемых систем.

**Ключевые слова:** запаздывание, устойчивость, функционалы Ляпунова – Красовского.

**AMS Subject Classification:** 47D09

Достаточно большой список систем с линейным (или пропорциональным) запаздыванием встречающихся в задачах физики, механики, биологии, экономики, теории очередей и т.д., приведен в [4]. Системы без нейтральных членов и приводимые к ним изучались в работах [1], [5], [6]. В частности, в работе [6] рассматривалась задача вертикальных колебаний полоза токоприемника движущегося локомотива при прохождении эластичной опоры. При удалении от опоры необходимо уже рассматривать уравнения нейтрального типа.

Рассматривается система

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + \hat{R}(t)dx(\mu t)/dt, \quad t \geq t_0 > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (1)$$

Решение системы определено на начальном множестве  $s \in [\mu t_0, t_0]$  вектор-функцией  $\hat{\varphi}(s) \in \mathbb{C}^1$ .  $A, B$  – постоянные матрицы  $m \times m$ ,  $\hat{R}(t)$  – непрерывно дифференцируемая матрица размерности  $m \times m$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^m$ . Доказывается, что при наличии собственного значения  $\lambda$  с положительной вещественной частью решение исходной системы неустойчиво при любой матрице  $\hat{R}(t)$ .

Сделав замену аргумента  $\tau = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$ , получаем систему с постоянным запаздыванием  $\sigma = -\ln(\mu)$ ,  $\sigma > 0$ ,

$$dz(\tau)/d\tau = t_0 \exp^\tau [Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)] + \mu R(\tau)dz(\tau - \sigma)/d\tau, \quad \tau \geq 0, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (2)$$

Считая, что собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательную вещественную часть, полагая при этом, что система без нейтральных членов в правой части полученной системы устойчива, но не асимптотически, получены достаточные условия устойчивости (но не асимптотической) полученной системы с нейтральными членами.

**Теорема 1.** Как следует из [3] ввиду равномерной ограниченности решения линейной системы

$$dy(t)/dt = Ay(t) + By(\mu t), \quad (3)$$

ее решение устойчиво.

**Замечание 1.** Отметим, что условие при котором всем собственным значениям  $|\rho_k| = 1$  отвечают жордановы клетки размерности 1, является существенным. При невыполнении этого условия вырожденная (разностная) система

$$\bar{y}(t) = -A^{-1}B\bar{y}(\mu t)$$

неустойчива. Ранее автором было показано, что в этом случае решение исходной системы (1) также неустойчиво.



Для получения достаточных условий неустойчивости системы без нейтральных членов можно использовать знакопеременные функционалы Ляпунова – Красовского вида [3]

$$V(\tau, z(\tau), z_\tau) = \frac{e^{-\tau}}{t_0} W(z) + \sum_{j=1}^m \nu_j \int_{\tau-\sigma}^{\tau} z_j^2(s) ds,$$

$W(z)$  – квадратичная форма (не обязательно определено положительная,  $\nu_j$  – константы. Приведен пример уравнения первого порядка, показывающий, что при использовании методов изложенных в [2] из неустойчивости решения уравнения без нейтральных членов следует и неустойчивость аналогичного уравнения уже с нейтральным членом. Данные методы позволяют исследовать системы с переменными матрицами  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  и  $R(\tau)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И. Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1993. 29, № 5. С. 751–758.
2. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с запаздыванием. М. : Наука, 1981.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 2011.
4. Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журо А. И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием. Свойства, методы решения и модели. М. : ИПМех.РАН, 2022.
5. Carr J., Dyson J. The matrix functional-differential equation  $y'(x) = Ay(\lambda x) + By(x)$  // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematical and Physical Sciences. 1976. 75, № 1. P. 5–22.
6. Ockendon J. R., Tayler A. B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proceedings of the Royal Society of London. Section A: Mathematical and Physical Sciences. 1971. 322, № 1551.

Гребенщиков Борис Георгиевич

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))

E-mail: boris.g.grebenshchikov.48@mail.ru



## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ И ПАРАМЕТРОМ

© 2023 г. Л. Р. Д. ДРЕГЛЯ СИДОРОВ, Н. А. СИДОРОВ

**Аннотация.** Рассматривается нелинейное операторное уравнение с линейным функционалом и параметром при любом значении которого существует тривиальное решение. Получены необходимые условия на критические значения параметра (точки бифуркации) в окрестности которых уравнение имеет нетривиальное решение. Приведены иллюстрирующие приложения для классов уравнений в частных производных.

**Ключевые слова:** точка бифуркации, линейный функционал, параметр, банаховы пространства, задача Гурса.

**AMS Subject Classification:** 47J15

### 1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$Bu = F(u, u_\alpha, \lambda). \quad (1)$$

Здесь  $u$  – искомое решение из банахова пространства  $E_1$ .  $u_\alpha \doteq \langle u, \alpha \rangle$  – линейный функционал, где  $\alpha$  принадлежит сопряженному пространству  $E_1^*$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Отображение  $B : D(L) \subset E_1 \mapsto E_2$  – линейный плотно заданный оператор со значениями в банаховом пространстве  $E_2$ . В правой части уравнения (1) нелинейный оператор  $F$  определяется формулой:

$$F = A(\lambda)u_\alpha + \sum_{i+k=l}^N A_{ik}(\lambda, u)u^k, \quad l \geq 2, \quad (2)$$

где  $A_{ik}(\lambda, u)$  –  $i$ -однородные ограниченные операторы, действующие из  $E_1$  в  $E_2$

$$A_{ik}(\lambda, cu) = c^i A_{ik}(\lambda, u) \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

$$\|A_{ik}\|_{E_2} \leq m_{ik} \|u\|_{E_1}^i, \quad m_{ik} \in \mathbb{R}_+.$$

Предполагается, что линейный оператор  $B$  имеет ограниченный обратный  $B^{-1} : E_2 \mapsto D(E_1) \subset E_1$ . Заметим, что в силу (2)  $F(0, 0, \lambda) = 0$  при  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . В статье развиваются результаты работ [3, 5], используется теория монографий [1, 2, 4].

**Определение 1.** Точка  $\lambda_0$  называется *точкой бифуркации уравнения (1)*, если при любых  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  существует решение  $u$  в пространстве  $E_1$  и число  $\lambda$ , для которых выполнены неравенства  $0 < \|u\|_{E_1} < \varepsilon$ ,  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ .

В работе находятся необходимые условия, при выполнении которых  $\lambda_0$  является точкой бифуркации уравнения (1) и существует нетривиальное решение  $u(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Необходимое условие иллюстрируется на классах нелинейных уравнений гиперболического типа с нагрузками.

**2. Построение уравнения разветвления и необходимое условие бифуркации.** От уравнения (1) перейдем к эквивалентному уравнению

$$u = B^{-1}F(u, u_\alpha, \lambda) \quad (3)$$

и будем искать его решение в виде ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) u_\alpha^n. \quad (4)$$

Напомним, что функционал  $u_\alpha$  зависит от  $\lambda$  и в силу нашей цели (построение малых решений уравнения (1)) может считаться бесконечно малым при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Коэффициенты ряда (4) являются элементами банахова пространства  $E_1$  и могут быть построены методом неопределенных коэффициентов с помощью формул:

$$a_1(\lambda) = B^{-1}A(\lambda), \quad (5)$$

$$a_n(\lambda) = \frac{1}{n!} B^{-1} \frac{\partial^n}{\partial u_\alpha^n} \left[ \sum_{i+k=l}^N A_{ik}(a_1(\lambda)u_\alpha + \dots + a_{n-1}(\lambda)u_\alpha^{n-1}) \right] \Big|_{u_\alpha=0} \quad n = 2, 3, \dots$$

На основании теоремы о неявном отображении ряд (4) сходится при  $|u_\alpha| < \rho$ , где  $\rho$  – достаточно мало. Подействуем на (4) линейным функционалом  $\langle \cdot, \alpha \rangle$ . В результате получим искомое уравнение для определения нагрузки

$$L(u_\alpha, \lambda) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} L_n(\lambda) u_\alpha^n = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$L_1(\lambda) = \langle a_1(\lambda), \alpha \rangle - 1, \\ L_n(\lambda) = \langle a_n(\lambda), \alpha \rangle \quad n = 2, 3, \dots$$

Нелинейное уравнение (6) в окрестности некоторых точек  $\lambda_0$  может иметь несколько малых решений  $u_\alpha \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Поэтому и уравнение (1) может иметь несколько малых решений в пространстве  $E_1$  в виде ряда (4).

**Лемма 1.** *Для того, чтобы  $\lambda_0$  могла быть точкой бифуркации уравнения (1) необходимо, чтобы выполнялось равенство  $L_1(\lambda_0) = 0$ .*

Доказательство повторяет соответствующее доказательство из работы [3], где был исследован более узкий класс задач.

**Следствие 1.** *Пусть в уравнении разветвления (6)  $L_n(\lambda_0) = 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\lambda_0$  является точкой бифуркации задачи (1). Более того, уравнение (1) при данном  $\lambda_0$  имеет  $s$ -параметрическое нетривиальное решение  $u(\lambda_0, s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$ . Других малых решений в проколотой окрестности  $\lambda_0$  уравнение (1) не имеет.*

**Следствие 2.** *Число малых нетривиальных решений уравнения (1) не превышает число нетривиальных решений уравнения разветвления (6) из окрестности корней уравнения  $L_1(\lambda) = 0$ .*

**3. Построение решения уравнения (1) в случае, когда отображение  $F$  не зависит от искомой функции.** Пусть оператор  $F$  не зависит от искомой функции  $u$ . Тогда имеет место такой результат.

**Следствие 3.** *Пусть в уравнении (1) стоит нелинейное отображение*

$$F(u_\alpha, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda) u_\alpha^n.$$

Здесь  $A_n : \mathbb{R} \mapsto E_2$ ,  $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$ , ряд сходится равномерно при  $|u_\alpha| \leq \rho$ . Пусть линейный оператор  $B$  имеет ограниченный обратный. Тогда функционал  $u_\alpha$  удовлетворяет уравнению вида (6), в котором теперь

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &= \langle B^{-1}A_1(\lambda), \alpha \rangle - 1, \\ L_n(\lambda) &= \langle B^{-1}A_n(\lambda), \alpha \rangle \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае построение уравнения разветвления (6) упрощается, а решение уравнения (1) строится в виде ряда (4), в котором  $a_n = B^{-1}A_n(\lambda)$ . Из следствия 3 вытекает

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия следствия 3. Пусть при этом

$$\begin{aligned} \langle B^{-1}A_1(\lambda_0), \alpha \rangle - 1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \langle B^{-1}A_1(\lambda), \alpha \rangle \Big|_{\lambda=\lambda_0} &\neq 0, \\ \langle B^{-1}A_2(\lambda_0), \alpha \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Тогда  $\lambda_0$  будет точкой бифуркации уравнения (1). Более того, в окрестности точки  $\lambda_0$  при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  существует решение

$$u(\lambda) = B^{-1}A_1(\lambda_0)c(\lambda - \lambda_0) + r(\lambda - \lambda_0),$$

где

$$c = -\frac{\langle B^{-1}A_1(\lambda_0), \alpha \rangle}{\langle B^{-1}A_2(\lambda_0), \alpha \rangle}, \quad \|r(\lambda - \lambda_0)\| = \mathcal{O}(|\lambda - \lambda_0|^2).$$

Доказательство проводится путем применения теоремы о неявной функции для построения остатка  $r(\lambda - \lambda_0)$  методом последовательных приближений.

**Замечание 1.** Если в уравнении (1) стоит справа полином  $F(u_\alpha, \lambda) = \sum_{n=1}^N A_n(\lambda)u_\alpha^n$ , где  $A_n : \mathbb{R} \mapsto E_2$ , то и искомого решение уравнения (1) тоже строится в виде полинома по степеням функционала  $u_\alpha$ . Функционал  $u_\alpha$  определяется из алгебраического уравнения  $(\langle B^{-1}A_1(\lambda), \alpha \rangle - 1)u_\alpha + \sum_{n=2}^N \langle B^{-1}A_n(\lambda), \alpha \rangle u_\alpha^n = 0$ . В точках  $\lambda_0$  удовлетворяющих равенству  $\langle B^{-1}A_1(\lambda_0), \alpha \rangle = 1$  решения алгебраического уравнения могут пересекаться с его тривиальным корнем  $u_\alpha = 0$ .

#### 4. Пример. Рассмотрим задачу Гурса

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = b(x,t,\lambda)u_\alpha + \sum_{n=2}^N b_n(x,t,\lambda)u_\alpha^n, \\ u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad t \in [0, \tau], \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad x \in [0, \chi]. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $u_\alpha \doteq u(x_0, t_0)$ ,  $x_0 \in (0, \chi]$ ,  $t_0 \in (0, \tau]$ . Обратный к  $B$  имеет вид  $B^{-1} \doteq \int_0^t \int_0^x [\cdot] dx dt$ . Решение  $u$  ищем в виде полинома  $u = \sum_{n=1}^N a_n(x, t, \lambda)u_\alpha^n$ , где

$$\begin{aligned} a_1(x, t, \lambda) &= \int_0^t \int_0^x b(x, t, \lambda) dx dt, \\ a_n(x, t, \lambda) &= \int_0^t \int_0^x b_n(x, t, \lambda) dx dt \quad n = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Пусть

$$a_1(x_0, t_0, \lambda_0) - 1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} a_1(x_0, t_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0, \quad a_2(x_0, t_0, \lambda_0) \neq 0,$$

в этом случае будут выполнены условия теоремы 1.

**Замечание 2.** Если  $E_1 = C_{[a,b]}$ , то можно использовать линейный функционал

$$u_\alpha \doteq \sum_{i=1}^n d_i u(t_i) + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} m_i(s) u(s) ds,$$

порождающий точки локальных и интегральных нагрузок.

**5. Заключение.** Приведем одно усиление теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть оператор  $B$  обратим,  $L_i(\lambda_0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, l-1$ ,  $L_l(\lambda_0) \neq 0$ ,  $L'_1(\lambda_0) \neq 0$ . Тогда при четном  $l$  задача (1) в окрестности  $\lambda_0$  имеет ровно одно малое вещественное решение. При нечетном  $l$  существует два таких решения, определенных в той полукрестности точки бифуркации  $\lambda_0$ , в которой  $L'_1(\lambda_0)L_l(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) < 0$ . Более того, для решения справедливо асимптотическое представление при  $\mu \rightarrow 0$ .

$$u(\lambda_0 + \mu) = B^{-1}A(\lambda_0) \sqrt[l]{-\frac{L'_1(\lambda_0)}{L_l(\lambda_0)}\mu} + o(|\mu|^{\frac{1}{l-1}}). \quad (8)$$

Наконец, отметим, что в случае полиномиальной нелинейности  $F = A(\lambda)u_\alpha + A_2(\lambda)u_\alpha^2 + A_3u_\alpha^3$  и обратимого операторе  $B$  можно построить два нетривиальных решения (1) в замкнутом виде при любом  $\lambda_0$ . Формула (8) при  $l = 2$  даст асимптотическое представление одного из этих решений при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. : Наука, 1969.
2. Красносельский М. А. Приближенное решение операторных уравнений. М. : Наука, 1969.
3. Сидоров Н. А., Дрегла Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. 43. С. 78–90.
4. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1982.
5. Sidorov N., Sidorov D. Branching solutions of the Cauchy problem for nonlinear loaded differential equations with bifurcation parameters // Mathematics. 2022.

Дрегла Сидоров Лев Раян Денисович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: lev.ryan.lev@gmail.com

Сидоров Николай Александрович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: sidorovisu@gmail.com



## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ХОФФА

© 2023 г. С. А. ЗАГРЕБИНА, М. А. САГАДЕЕВА

**Аннотация.** Изложены результаты исследования устойчивости нулевого решения в нестационарных линеаризованных моделях Хоффа на геометрических графах. Эти модели описывают конструкции из двутавровых балок, широко применяемых в строительстве. При высоких температурах в таких моделях параметр в правой части уравнения перестает быть стационарным, что объясняет появление функции времени в уравнении. Устойчивость нулевого решения линеаризованной модели Хоффа позволяет при воздействии высоких температур более точно определять время поддержания стабильности конструкций, описываемых с её помощью.

**Ключевые слова:** геометрический граф, нестационарные уравнения соболевского типа, выпучивание двутавровой балки.

**AMS Subject Classification:** 47D09

Рассмотрим уравнение Хоффа [7]

$$(\lambda - \lambda_0 + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 + f,$$

которое вкупе с граничными условиями позволяет смоделировать выпучивание двутавровой балки, которая оказывается под воздействием постоянной нагрузки, а также высокой температуры. Задаваемые параметры  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  отражают характеристики свойств материала балки, тогда как параметры  $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  выступают характеристикой самой нагрузки. Функция  $u = u(x, t) \in (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$  помогает построить и описать отклонение балки от вертикали ( $u = 0$ ), где  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  является ограниченной областью в границах  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ .

Динамику конструкции из двутавровых балок моделируют уравнения Хоффа

$$(\lambda_j - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha_j u_j + \beta_j u_j^3 + f_j, \quad (1)$$

заданные на конечном связном ориентированном графе  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ , где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_i\}$  – множество ребер. Каждое ребро  $E_j$  имеет длину  $l_j \in \mathbb{R}_+$  и площадь поперечного сечения  $d_j \in \mathbb{R}_+$ ;  $u_j = u_j(x, t)$ ,  $(x, t) \in (0, l_j) \times \mathbb{R}_+$ , характеризует отклонение  $j$ -той балки от положения равновесия; параметры  $\lambda_0, \lambda_j \in \mathbb{R}_+$  выступают характеристиками нагрузки на эту балку, а параметры  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  характеризуют свойства материала  $j$ -ой балки, а  $f_j \equiv f_j(x, t)$  отвечает внешней нагрузке на неё.

Обозначим через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  множество ребер с началом (концом) в вершине  $V_i$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , и зададим в вершинах  $\mathfrak{V}$  графа  $\mathbf{G}$  условия «непрерывности»:

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i). \quad (2)$$

Для уравнений (1) условия (2) требуют непрерывности решений  $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$  в вершинах  $\mathfrak{V}$  графа  $\mathbf{G}$  и означают, что балки жестко закреплены в узлах. Кроме этого, зададим условие «баланса потока» в вершинах – аналог условий Кирхгофа для электрических цепей –

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0. \quad (3)$$

Отметим, что условия (3) для уравнений (1) означают, что узлы конструкции неподвижны.

Если граф состоит из одного нециклического ребра (т.е. вершин у графа две), то условие (2) отсутствует, а условие (3) превращается в условие Неймана. Если же ребро циклическое (т.е. вершина у графа одна), то условия (2), (3) превращаются в условия согласования. Заметим еще, что в контексте условий (2), (3) «отсутствовать» не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину  $V_i$  все ребра «входят», то первые два равенства в (2) и уменьшаемое в (3) именно «отсутствуют», а не равны нулю. Следуя терминологии [2], граф  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ , обладающий вышеперечисленными свойствами, будем называть *геометрическим графом*.

Рассмотрим на геометрическом графе  $\mathbf{G}$  нестационарные линейаризованные уравнения ХOFFфа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha(t)u_j \quad \text{для всех } x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R} \quad (4)$$

с условиями (2), (3), моделирующие выпучивание двутавровых балок в конструкции в линейном приближении с учетом изменения во времени свойств материала, которое описывается скалярной функцией  $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ . При воздействии высоких температур параметры материала могут меняться, что и обуславливает использование в уравнениях функции, зависящей от времени. Дополним задачу (2), (3), (4) условием Коши

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x). \quad (5)$$

На основе результатов [3] о разрешимости нестационарных уравнений соболевского типа [5], в докладе излагаются результаты об устойчивости нулевого решения нестационарных линейаризованных уравнений ХOFFфа (4) на геометрическом графе с условиями (2), (3), (5). Отметим, что для такой модели неприменимы результаты об устойчивости решений в терминах дихотомий решений [4], поэтому используются абстрактные результаты [6] об устойчивости нулевого решения для линейного нестационарного уравнения соболевского типа, а также результаты [1] об устойчивости решений стационарных уравнений ХOFFфа (1) с теми же начально-краевыми условиями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загребина С. А., Москвичёва П. О.* Устойчивость в моделях ХOFFфа. Saarbrücken : LAMBERT Academic Publishing, 2012. 75 с.
2. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. 272 с.
3. *Сагадеева М. А.* Вырожденные потоки разрешающих операторов для нестационарных уравнений соболевского типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2017. 9, № 1. С. 22–30.
4. *Сагадеева М. А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа. Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2012. 139 с.
5. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи математических наук. 1994. 49, № 4 (298). С. 47–74.
6. *Buevich A. V., Sagadeeva M. A., Zagrebina S. A.* Stability of a stationary solution to one class of non-autonomous Sobolev type equations // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2023. 16, № 3. P. 77–86.
7. *Hoff N. J.* The Analysis of Structures. New York ; London : John Wiley ; Chapman and Hall, 1956. 493 pp.

Загребина Софья Александровна  
Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))  
E-mail: zagrebinasa@susu.ru

Сагадеева Минзиля Алмасовна  
Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ (НИУ))  
E-mail: sagadeevama@susu.ru





## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА И НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ КОШИ

© 2023 г. А. А. ЗАМЫШЛЯЕВА, Е. В. БЫЧКОВ

**Аннотация.** Представлены результаты исследования модифицированного уравнения Буссинеска с однородным краевым условием Неймана и с начальными условиями Коши или Шоултера – Сидорова. На основе метода компактности показано, что приближенное аналитическое решение, построенное в виде галеркинской суммы по системе собственных функций однородной задачи Неймана, \*-слабо сходится к точному решению. Уравнения данного вида находят свое применение при описании волновых процессов в различных областях от гидродинамики (теория мелкой воды) до релятивистской квантовой механики.

**Ключевые слова:** модифицированное уравнение Буссинеска; уравнения соболевского типа; условие Неймана; метод Галеркина; \*-слабая сходимость.

**AMS Subject Classification:** 35C09, 35Q35

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ . В цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$  рассмотрим модифицированное уравнение Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - \alpha^2 \Delta u + u^3 = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

с однородным краевым условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (2)$$

и начальным условием Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x, t)$  – производная по направлению внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Уравнение (1), например, моделирует распространение волн на мелкой воде [1]. В этом случае функция  $u = u(x, t)$  определяет высоту волны, а параметр  $\lambda$  характеризует капиллярные эффекты. В [12] доказано существование единственного глобального решения задачи Коши для обобщенного модифицированного уравнения Буссинеска в невырожденном случае (с параметрами  $\lambda = 1, \alpha = 1$ ). В [9] на основе другой модификации уравнения Буссинеска описывается распространение уединенных продольных волн деформации в тонком упругом стержне. Уравнение (1) находит применение и в релятивистской квантовой механике, так в [10] оно рассматривается как полевое уравнение нелинейной классической мезонной теории.

Используя теорию  $(L, p)$ -ограниченных операторов, разработанную Г.А. Свиридюком и его учениками [5, 6], в работе [2] показано, что, задав операторы  $L = \lambda - \Delta, M = \alpha^2 \Delta, N(u) = u^3$  в специально подобранных банаховых пространствах, задачу (1)–(3) можно представить как задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \quad (4)$$

для операторно-дифференциального уравнения [11] вида

$$L\ddot{u} - Mu + N(u) = 0, \quad (5)$$

где  $\dot{u}, \ddot{u}$  – первая и вторая производные по  $t$ .

Затем, используя метод фазового пространства [5], доказана теорема о существовании единственного локального решения. Пусть  $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$  – банаховы пространства, оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т.е. линейный и непрерывный), а оператор  $M \in \mathcal{CL}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (линейный и плотно определенный). Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора  $M$  относительно оператора  $L$  (или,  *$L$ -резольвентным множеством* оператора  $M$ ). Множество  $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$  называется *спектром* оператора  $M$  относительно оператора  $L$  (или,  *$L$ -спектром* оператора  $M$ ).

Оператор-функции  $(\mu L - M)^{-1}, R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L, L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$  с областью определения  $\rho^L(M)$  называются, соответственно, *резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой* оператора  $M$  относительно оператора  $L$  (короче,  *$L$ -резольвентой, правой  $L$ -резольвентой, левой  $L$ -резольвентой оператора  $M$* ).

Оператор  $M$  называется  *$(L, \sigma)$ -ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) d\lambda \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\lambda^L(M) d\lambda$$

являются проекторами в пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$ , соответственно [4]. Здесь  $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$ .

**Определение 1.** *Множество  $\mathfrak{P}$  называется фазовым пространством уравнения (5), если*  
 1) *для любых  $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$  (касательного расслоения  $\mathfrak{P}$ ) существует единственное решение задачи (4), (5);*  
 2) *любое решение  $u = u(t)$  уравнения (5) лежит в  $\mathfrak{P}$  как траектория.*

Причем запись  $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$  следует понимать, как  $u_0 \in \mathfrak{P}$  и  $(u_0, u_1) \in T_{u_0}\mathfrak{P}$ .

Пусть  $\ker L \neq \{0\}$  и оператор  $M$   $(L, 0)$ -ограничен, тогда, в силу теоремы о расщеплении [5], уравнение (5) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u), \\ \ddot{u}^1 = L_1^{-1}Q(M + N)(u), \end{cases}$$

где  $u^1 = Pu$ . Тогда фазовым пространством  $\mathfrak{P}$  уравнения (5) является множество

$$\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u) = 0\}.$$

Таким образом, в работе [2] было доказано существование единственного локального решения (4), (5).

**2. Теорема существования.** В работе [8] подробно рассмотрен случай с условиями Дирихле, поэтому в данном параграфе дадим формулировку теоремы существования решения (1)–(3) и идею доказательства для задачи Неймана.

Для решения нам понадобятся несколько функциональных пространств. Зададим пространство

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), Du \in L^2(\Omega), \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \right|_{\partial\Omega} = 0\}$$

и обозначим  $B = L^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Кроме того, зададим пространства распределений  $L^\infty(0, T; B)$  и  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Сопряженные им пространства строятся по теореме Данфорда – Петтиса  $(L^\infty(0, T; B))^* \simeq L^1(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \cup H^{-1}(\Omega))$  и  $(L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^* \simeq L^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

Пусть  $\lambda_k$  – собственные значения однородной задачи Неймана (2) для оператора  $-\Delta$ , занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а  $\varphi_k$  соответствующие им собственные функции. Кроме того, линейная оболочка  $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$  при  $m \rightarrow \infty$  плотна в  $B$  и ортонормирована (в смысле скалярного произведения в  $L^2(\Omega)$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$ ,  $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{F}$ , причем  $u_0 \in B$  и  $u_1 \in L^2(\Omega) \cap \text{coim}L$ . Тогда существует решение задачи (1)–(3) и  $u = u(x, t)$  такое, что  $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$  и  $\dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap \text{coim}L)$ .

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде галеркинського приближения [3]

$$u^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t) \varphi_k. \quad (6)$$

Коэффициенты  $a_k^m(t)$  найдем из системы алгебро-дифференциальных уравнений

$$\langle L\ddot{u}^m, \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \Delta u^m, \varphi_k \rangle + \langle (u^m)^3, \varphi_k \rangle = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (7)$$

Используя разложения начальных функций в ряд по базисным функциям, получим начальные условия для системы алгебро-дифференциальных уравнений (7)

$$a_k^m(0) = \beta_k^m, \quad \dot{a}_k^m(0) = \gamma_k^m, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (8)$$

где  $\beta_k^m = \langle u_0, \varphi_k \rangle$  и  $\gamma_k^m = \langle u_1, \varphi_k \rangle$ , причем

$$u_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \rightarrow u_0 \text{ в } B, \text{ и } u_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \rightarrow u_1 \text{ в } L^2(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

В силу классической теории и того факта, что начальные данные лежат в касательном расслоении фазового пространства, существует локальное решение  $u^m = u^m(x, t)$ ,  $t \in [0, t^m]$  задачи (7), (8).

Получим априорные оценки. Введем в пространстве  $\text{coim}L \cap L^2(\Omega)$  ( $L^2(\Omega) = \text{coim}L \oplus \ker L$ ) норму  $|\dot{u}|^2 = \langle L\dot{u}, \dot{u} \rangle$  в силу принципа Куранта эта норма эквивалентна норме  $\dot{u}$  в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

$$|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2 \|u^m\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2} \|u^m\|_{L^4}^4 \leq C.$$

Теперь можно перейти почленно к пределу в равенстве (7). Ввиду плотности системы функций  $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$  в пространстве  $B$  при  $m \rightarrow \infty$ , и произвольности выбора  $\varphi_k$ , имеет место равенство для произвольного  $v \in B$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lu, v \rangle + \alpha^2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \langle u^3, v \rangle = 0.$$

### 3. Теорема единственности.

**Теорема 2.** В условиях Теоремы 1 и при  $n = 1, 2, 3$  решение задачи (1)–(3) единственно.

Доказательство проводится методом от противного и основывается на неравенстве Гельдера, теореме вложения и лемме Гронуолла.

**4. Заключение.** Вместо условия Коши (3), в задаче (1)–(3) можно рассмотреть условие Шоултера–Сидорова

$$P(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad P(u_t(x, 0) - u_1(x)) = 0. \quad (9)$$

Условие (9) является естественным обобщением условия Коши для уравнений соболевского типа [7] и не требует проверки принадлежности начальных функций касательному расслоению фазового пространства уравнения.

**Теорема 3.** Пусть  $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$ ,  $u_0 \in B = H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$  и  $u_1 \in L^2(\Omega)$ . Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), (11) и  $u = u(x, t)$  такое, что  $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$  и  $\dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ .

Количество базисных функций для галеркинського приближения следует выбирать так, чтобы их линейная оболочка покрывала ядро оператора  $L$ , для учета эффекта вырожденности уравнения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Д. Г., Хабазпашев Г. А.* Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах // Письма в ЖЭТФ. 2011. 93, № 8. С. 469–472.
2. *Замышляева А. А., Бычков Е. В.* Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 12. С. 13–19.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 588 с.
4. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи математических наук. 1994. 49, № 4(298). С. 47–74.
5. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференциальные уравнения. 1990. 26, № 2. С. 250–258.
6. *Свиридюк Г. А., Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка // Дифференциальные уравнения. 2006. 42, № 2. С. 252–260.
7. *Свиридюк Г. А., Загребина С. А.* Задача Шоултера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2010. 3, № 1. С. 104–125.
8. *Bychkov E. V.* Analytical study of the mathematical model of wave propagation in shallow water by the Galerkin method // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2021. 14, № 1. P. 26–38.
9. *Clarkson P. A., LeVeque R. J., Saxton R.* Solitary wave interactions in elastic rods // Stud. Appl. Math. 1986. 75, № 1. P. 95–122.
10. *Jorgens K.* Das Anfangswertproblem in Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen // Math. Zeitschr. 1961. 77. P. 295–308.
11. *Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A.* Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models. World Scientific, 2020. 496 pp.
12. *Wang S., Chen G.* Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation // J. Math. Anal. Appl. 2002. 274. P. 846–866.

Замышляева Алена Александровна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ(НИУ))

E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru

Бычков Евгений Викторович

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ(НИУ))

E-mail: bychkovev@susu.ru



## О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2023 г. И. В. ЗАХАРОВА, М. В. ФАЛАЛЕЕВ

**Аннотация.** Исследуются системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих малый положительный параметр в главной части. Устанавливается связь между решениями системы с малым параметром и решениями предельной системы, получаемой если параметр положить равным нулю. Представлены классы систем, при сингулярном возмущении которых сохраняются свойства регулярно возмущенных задач и соответственно для них допускается построение асимптотических решений уже методами регулярной теории возмущений.

**Ключевые слова:** малый параметр, сингулярно возмущенное уравнение, предельная задача, задача Дирихле, задача Коши.

**AMS Subject Classification:** 35A20

**1. Введение.** При исследовании дифференциальных уравнений содержащих малый параметр (возмущение) возникает вопрос о соотношении между решениями исходной (возмущенной) задачи и предельной (когда малый параметр обращается в ноль). Иначе говоря, можно ли исходя из решения предельной задачи получить хотя бы приближенно решение возмущенной задачи. Если возмущение носит регулярный характер, то это возможно. В сингулярном случае, например для обыкновенных дифференциальных уравнений предельный переход по параметру в уравнении может привести к изменению порядка возмущенного уравнения и соответственно к существенно-му различию свойств решений обеих задач, как следствие невозможность предельного перехода между ними. В случае дифференциальных уравнений в частных производных обращение в ноль малого параметра в главной части может и не изменить порядок уравнения, но поменять его тип и соответственно для таких задач можно ожидать весьма разнообразную картину [2, 3]. В данной работе выделены два класса сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, для которых возможен предельный переход по параметру.

**2. Задача Коши для систем, сводящихся к уравнениям гиперболического типа.** Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

$$u_i(x, 0, \epsilon) = f_i(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = g_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $u_i(x, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ ,  $f_i(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ ,  $g_i(x) \in C(\mathbb{R}^1)$ ,  $f_i(x)$  и  $g_i(x)$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}^1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon > 0$  – малый параметр.

Относительно матрицы коэффициентов  $A = \|a_{ij}\|$  будем предполагать выполненным следующее условие:

**A)**  $\det A \neq 0$  и все элементарные делители матрицы  $A$  первой степени, тогда её жорданова форма имеет диагональный вид [1]

$$A = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} T,$$

причем среди чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  могут быть равные, но все  $\lambda_i \neq 0$ . Дополнительно будем предполагать, что все характеристические числа матрица  $A$  положительны ( $\lambda_i > 0$ ).

При выполнении условия **A**), невырожденной заменой переменных  $\bar{v} = T\bar{u}$ , где  $\bar{u}(x, t, \epsilon)$  – вектор-столбец искомых функций

$$\bar{u}(x, t, \epsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x, t, \epsilon) \\ u_2(x, t, \epsilon) \\ \vdots \\ u_n(x, t, \epsilon) \end{pmatrix}$$

задача (1) – (3) распадается на  $n$  независимых задач для уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \lambda_j \left( \epsilon \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (4)$$

$$v_j(x, 0, \epsilon) = F_j(x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = G_j(x), \quad (6)$$

здесь

$$\bar{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{G}(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ \vdots \\ G_n(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Введением новой переменной  $\tau$  и новой функции  $V_j(x, \tau, \epsilon)$  по правилам:

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}, \quad v_j(x, t, \epsilon) = V_j(x, \tau, \epsilon) \exp \left( -\frac{\alpha \tau}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} \right),$$

задачу (4) – (6) перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4\epsilon} V_j = 0, \quad (7)$$

$$V_j(x, 0, \epsilon) = F_j(x),$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau}(x, 0, \epsilon) = \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(x) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(x).$$

Стандартной заменой переменных  $\xi = \tau - x$ ,  $\eta = \tau + x$  уравнение (7) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\alpha^2 \lambda_j}{16\epsilon} W_j = 0,$$

с условиями на характеристике и может быть решено методом Римана. Возвращаясь к исходным переменным получаем явный вид решения задачи (4) – (6)

$$\begin{aligned} v_j(x, t, \epsilon) = \exp \left( -\frac{\alpha t}{2} \right) & \left\{ \frac{F_j \left( x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \right) + F_j \left( x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \right)}{2} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}}^{\frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}} \left[ \mathcal{J}_0 \left( \frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} \right) \left( \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(x - \xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(x - \xi) \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{i} \mathcal{J}_1 \left( \frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} \right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_j} t}{2\sqrt{\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} F_j(x - \xi) \right] d\xi \right\}, \end{aligned}$$

здесь  $\mathcal{J}_0(ix)$  и  $\frac{1}{i} \mathcal{J}_1(ix)$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка мнимого аргумента.

Справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v_j(x, t, \epsilon) = \frac{\sqrt{\lambda_j \alpha}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_j \alpha (x - \xi)^2}{4t}\right) F_j(\xi) d\xi = v_j^0(x, t).$$

Полученная таким образом функция  $v_j^0(x, t)$  является решением предельной задачи (т.е.  $\epsilon = 0$ ) для (4) – (6), но для его существования условие (6) является лишним. Таким образом доказано следующее утверждение

**Теорема 1.** Если для матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  задачи (1) – (3) выполнено условие **A**), то для решения этой задачи справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{u}(x, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T^{-1} \bar{v}(x, t, \epsilon) = T^{-1} \bar{v}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t),$$

где  $\bar{u}^0(x, t)$  – решение предельной системы для (1) – (3).

**Замечание 1.** Теорема остается справедливой и в более общих предположениях относительно матрицы  $A = \|a_{ij}\|$ . А именно, известно (см. [1]). что для любой квадратной матрицы  $A$  размерности  $n$  существует невырожденная матрица  $T$  такая, что

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu} \end{pmatrix} = \quad (8)$$

$$= \text{diag}\{\lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1}, \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2}, \dots, \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu}\},$$

здесь  $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = n$ , индекс  $q_i$  при квадратных матрицах  $E_{q_i}$  (единичной) или  $N_{q_i}$  (жорданов нильпотентный блок) означает их размерность  $q_i$ ,

$$N_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad N_{q_i}^{q_i} = O_{q_i}.$$

Правую часть равенства (8) называют канонической жордановой формой матрицы  $A$ , блоки  $(\lambda_i E_{q_i} + N_{q_i})$  называют жордановыми «ящичками», числа  $\lambda_i$  называют собственными числами матрицы  $A$  кратности  $q_i$ , причем все  $\lambda_i \neq 0$ , если  $\det A \neq 0$ .

**3. Задача Дирихле для систем, сводящихся к уравнениям эллиптического типа.** Рассмотрим задачу Дирихле в полупространстве  $t > 0$  для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (9)$$

$$u_i(x_1, x_2, 0, \epsilon) = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где  $u_i(x_1, x_2, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ ,  $f_i(x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}^2)$ ,  $f_i(x_1, x_2)$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon > 0$  – малый параметр,  $\lim_{(x_1, x_2, t) \rightarrow \infty} |u_i(x_1, x_2, t)| < +\infty$ .

Относительно матрицы коэффициентов  $A = \|a_{ij}\|$  будем предполагать (как выше) выполненным условие **A**). В этом случае той же заменой переменных  $\bar{v} = T\bar{u}$  задача (9) – (10) распадается на  $n$  независимых задач для уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2^2} + \lambda_j \left( \epsilon \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (11)$$

$$v_j(x_1, x_2, 0, \epsilon) = F_j(x_1, x_2). \quad (12)$$



Введением новых переменных по правилам:

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}, \quad v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) = V_j(x_1, x_2, \tau, \epsilon) \exp\left(\frac{\alpha \tau}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\right),$$

задачу (11) – (12) перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4\epsilon} V_j = 0, \quad V_j(x_1, x_2, 0, \epsilon) = F_j(x_1, x_2).$$

Решив эту задачу методом функции Грина и вернувшись к исходным переменным, получим решение задачи (11) – (12):

$$v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) = \frac{\lambda_j t}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y_1, y_2) \frac{2\epsilon + \alpha \sqrt{\lambda_j \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}}{\left(\sqrt{\lambda_j \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}\right)^3} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}{2\left(t + \sqrt{\lambda_j \epsilon ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}\right)}\right) dy_1 dy_2,$$

причем

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) &= \\ &= \frac{\alpha \lambda_j}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y_1, y_2) \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j}{4t} ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)\right) dy_1 dy_2 = v_j^0(x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

Полученная таким образом функция  $v_j^0(x_1, x_2, t)$  является решением предельной задачи для (11) – (12). Итак, доказано следующее утверждение

**Теорема 2.** Если для матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  задачи (9) – (10) выполнено условие **A**), то для решения этой задачи справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{u}(x_1, x_2, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T^{-1} \bar{v}(x_1, x_2, t, \epsilon) = T^{-1} \bar{v}^0(x_1, x_2, t) = \bar{u}^0(x_1, x_2, t),$$

где  $\bar{u}^0(x_1, x_2, t)$  – решение предельной системы для (9) – (10).

**Замечание 2.** Задача (9) – (10) допускает более общую постановку для уравнения

$$\Delta u_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = 0,$$

здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 552 с.
2. Захарова И. В. О некоторых задачах для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. 183. С. 61–72.
3. Янушаускас А. И. О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными // Сборник научных трудов. Иркутск : Иркут. ун-т, 1990. С. 94–103.

Захарова Ирина Валентиновна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: zair@math.isu.ru

Фалалеев Михаил Валентинович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: mvfalalееv@gmail.com



## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ

© 2023 г. А. Л. КАЗАКОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. Рассмотрена проблема построения решений с нулевым фронтом для нелинейной вырождающейся параболической системы типа реакция – диффузия. Сформулированы две теоремы существования и единственности решений искомого вида в классе аналитических функций. Построено точное решение системы, которое удалось записать в квадратурах. Предложен подход к построению приближенного решения, основанный на методе коллокаций с использованием разложения по радиальным базисным функциям. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты.

**Ключевые слова:** нелинейная параболическая система, вырождение, теорема существования, точное решение, метод коллокаций, вычислительный эксперимент.

**AMS Subject Classification:** 35K40, 35K57

**1. Введение.** Для некоторых тепловых, диффузионных и фильтрационных процессов [1, 2] свойственно распространение тепла (примесей) с ограниченной скоростью. Описать подобный эффект, используя линейные уравнения параболического типа [9], как известно, нельзя. Для этого иногда применяют уравнения гиперболического типа [8], однако они позволяют получить должную адекватность математического описания не во всех случаях. Возможным решением данной проблемы является использование нелинейных вырождающихся уравнений параболического типа [6, 11], а также их систем [10], наиболее простой из которых является система «реакция-диффузия», имеющая вид

$$U_t = [\Phi_1(U)]_{xx} + \Psi_1(U, V), \quad V_t = [\Phi_2(V)]_{xx} + \Psi_2(V, U), \quad (1)$$

где  $t, x$  – независимые переменные;  $U(t, x), V(t, x)$  – искомые величины; функции  $\Phi_i, \Psi_i, i = 1, 2$ , известны и обладают достаточной степенью гладкости. Предполагается также, что  $\Phi_1'(0) = \Phi_2'(0) = \Psi_1(0, 0) = \Psi_2(0, 0) = 0$ .

**2. Постановка задачи.** Будем считать функции  $\Phi_1(U)$  и  $\Phi_2(V)$  строго монотонными и сделаем в системе (1) замену  $u = \Phi_1'(U), v = \Phi_2'(V)$ , в результате которой система (1) примет вид

$$u_t = uu_{xx} + A(u)u_x^2 + F(u, v), \quad v_t = vv_{xx} + B(v)v_x^2 + G(v, u). \quad (2)$$

Выражения для функций  $A, B, F, G$  не приводятся из-за громоздкости. Существенно лишь то, что они обладают следующими свойствами:  $A(0) > 0, B(0) > 0, F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ .

Для системы (2) рассмотрим следующие краевые условия:

$$u|_{x=a(t)} = f(t), \quad v|_{x=b(t)} = g(t), \quad (3)$$

где  $a(t), b(t), f(t), g(t)$  – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условию  $a(0) = b(0) = f(0) = g(0) = 0$ .

Задача (2), (3) при выполнении некоторых дополнительных условий (см. ниже) имеет решения, описывающие возмущения, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью (диффузионные волны). Ранее подобные постановки рассматривались в основном для одиночных уравнений [3, 7], а также для системы (2) в специальных частных случаях [5].

**3. Теоремы существования.** Для задачи (2), (3) справедливы следующие теоремы существования и единственности решений

**Теорема 1.** Пусть для задачи (2), (3) выполняются следующие условия:

- 1)  $f, g \equiv 0$ ;
- 2)  $a, b$  и  $A, B, F, G$  – аналитические функции при  $t = 0$  и  $u = v = 0$  соответственно;
- 3)  $A(0), B(0) > 0, F(0, v) = G(u, 0) = 0$ ;
- 4)  $a(0) = b(0) = 0, a'(0) \cdot b'(0) > 0$ .

Тогда задача (2), (3) имеет единственное кусочно-аналитическое решение типа диффузионной волны.

**Теорема 2.** Пусть для задачи (2), (3) выполняются следующие условия:

- 1)  $a, b \equiv 0$ ;
- 2)  $f, g$  и  $A, B, F, G$  – аналитические функции при  $t = 0$  и  $u = v = 0$  соответственно;
- 3)  $A(0), B(0) > 0, F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ ;
- 4)  $f(0) = g(0) = 0, f'(0) > 0, g'(0) > 0$ ;
- 5)  $(u_x|_{x=0}) \cdot (v_x|_{x=0}) > 0$ .

Тогда при выборе знаков величин  $u_x|_{x=0}, v_x|_{x=0}$  задача (2), (3) имеет единственное кусочно-аналитическое решение типа диффузионной волны.

Доказательства теорем весьма объемные и здесь не приводятся. Отметим, что теорема 2 была доказана при участии к.ф.-м.н. П.А. Кузнецова.

**4. Точное решение.** Рассмотрим вопрос о построении точных решений с нулевым фронтом для системы (2) в случае степенных нелинейностей. Пусть  $A(u) = 1/\sigma, B(v) = 1/\delta, F(u, v) = \alpha_1 u + \alpha_2 v, G(v, u) = \beta_1 u + \beta_2 v, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \sigma, \delta \in \mathbb{R}, \sigma, \delta > 0$ . Тогда (2) примет вид

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \alpha_1 u + \alpha_2 v, \quad v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}v_x^2 + \beta_1 u + \beta_2 v. \quad (4)$$

С учетом выбора функций  $F$  и  $G$  решение будем искать в виде

$$u = \varphi_1(x) + \psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x) + \psi_2(t). \quad (5)$$

подставим (5) в систему (4). Опуская промежуточные выкладки, запишем итоговый вид решения

$$u_*(t, x) = \mu_1 R^2 [\text{ch}(\lambda t) + \eta \text{sh}(\lambda t)] - \mu_1 (x + R)^2, \quad v_*(t, x) = \frac{\mu_2 R^2}{\eta} [\text{sh}(\lambda t) + \eta \text{ch}(\lambda t)] - \mu_2 (x + R)^2, \quad (6)$$

где  $R \neq 0$  – произвольная константа,

$$\lambda^2 = \alpha_2 \beta_1 > 0, \mu_1 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\sigma^2 \delta \alpha_2^2 \beta_1}, \mu_2 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\sigma \delta^2 \alpha_2 \beta_1^2}, \eta = \sqrt[6]{\frac{\delta^2 \alpha_2}{\sigma^2 \beta_1}}. \quad (7)$$

**5. Численное решение.** Несмотря на то, что доказательства приведенных выше теорем конструктивны, построенные в них решения носят локальный характер с неизвестной в общем случае областью сходимости. В связи с этим рассмотрим вопрос построения численного решения задачи (2), (3) на заданном конечном промежутке времени.

Пусть  $f, g \equiv 0, a'(0) > 0, b'(0) > 0$ , т.е. условия (3) имеют вид

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0.$$

Положим для определенности  $b(t) \geq a(t)$  для всех  $t > 0$ .

Решение полученной задачи на заданном интервале  $t \in [0, T]$  будем строить по шагам. На каждом шаге  $t = t_k = kh$ , где  $h$  – размер шага, решение состоит из двух этапов.

*Этап 1.* На отрезке  $x \in [a(t_k), b(t_k)]$ , где  $u = 0$ , решаем задачу, соответствующую второму уравнению системы (2)

$$v_{xx} = [v_t - B(v)v_x^2 - G(v, 0)]/v, \quad v|_{x=b(t_k)} = 0, \quad (8)$$

$$v_x|_{x=b(t_k)} = -b'(t_k)/B(0). \quad (9)$$

Условие (9) следует из (8) и второго уравнения (2).

Этап 2. На отрезке  $x \in [0, a(t_k)]$  решаем задачу для системы:

$$u_{xx} = [u_t - A(u)u_x^2 - F(u, v)]/u, \quad v_{xx} = [v_t - B(v)v_x^2 - G(v, u)]/v, \quad (10)$$

$$u|_{x=a(t_k)} = 0, \quad v|_{x=a(t_k)} = v^{(1)}(t_k, a(t_k)), \quad (11)$$

$$u_x|_{x=a(t_k)} = -\frac{a'(t_k) - \sqrt{(a'(t_k))^2 - 4A(0)F(0, v^{(1)}(t_k, a(t_k)))}}{2A(0)}, \quad v_x|_{x=a(t_k)} = v_x^{(1)}(a(t_k, t_k)). \quad (12)$$

Здесь  $v^{(1)}(t_k, x)$  – решение, полученное на этапе 1. Граничное условие на  $u_x$  в (12) следует из условия (11) и первого уравнения (2).

Поскольку правые части уравнений Пуассона на обоих этапах зависят от искомым функций, решения строятся итерационно, с помощью метода коллокаций и аппроксимации правых частей уравнений радиальными базисными функциями. Итерационная процедура не приводится здесь из-за громоздкости.

**6. Пример.** Верификацию численного алгоритма проведем сравнением результатов расчетов с точным решением (6).

Пусть в системе (4)  $\alpha_2 = \beta_1 = 1$ ,  $\sigma = 8$ ,  $\delta = 3.375$ . Тогда при  $R = 1$  имеем:  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = 1.5$ ,  $\mu_2 = 1.125$ ,  $\alpha_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 2.25$ ,  $\eta = 0.75$ . Точное решение (6) примет вид

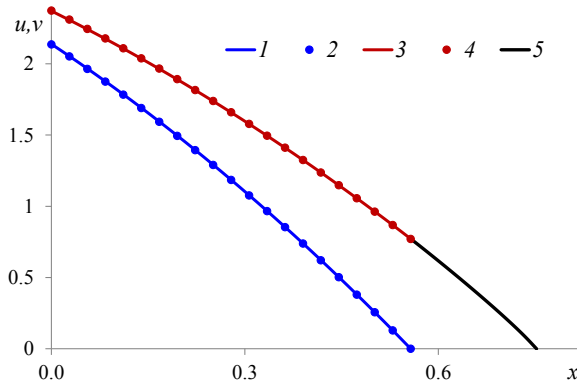
$$u = 1.3125e^t + 0.1875e^{-t} - 1.5(x+1)^2, \quad (13)$$

$$v = 1.3125e^t - 0.1875e^{-t} - 1.125(x+1)^2, \quad (14)$$

$$0 \leq x \leq a(t) = \sqrt{0.875e^t + 0.125e^{-t}} - 1.$$

Неизвестная априори функция  $b(t)$  и функция  $v(t, x)$ ,  $a(t) < x < b(t)$ , были найдены численно в результате решения задачи об инициировании волны [4], соответствующей точному решению (13), (14).

Отметим, что в рассматриваемом примере не выполняются равенства из условия 3 теоремы 1. Тем не менее, численный алгоритм работает корректно. На рис. 1 представлено сравнение графиков численного и точного решений в момент времени  $t = 1$ . Результаты показывают достаточно хорошую точность расчетов.



**Рис. 1.** Сравнение численного и точного решений при  $t = 1$ : 1 – функция  $u$ , численное; 2 – функция  $u$ , точное; 3 – функция  $v$ , численное; 4 – функция  $v$ , точное; 5 – функция  $v$ ,  $a(t) < x < b(t)$ , численное.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М. : Недра, 1972.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. : Физматлит, 1966.

3. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф. Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. 59, № 6. С. 1047–1062.
4. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2021. № 6. С. 54–67.
5. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Решения нелинейной вырождающейся системы реакция – диффузия типа диффузионных волн с двумя фронтами // Прикладная механика и техническая физика. 2022. 63, № 6. С. 104–115.
6. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987.
7. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М. : Физматлит, 2001.
8. Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Явная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности // Математическое моделирование. 2022. 34, № 12. С. 3–19.
9. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations interscience. New York : Interscience, 2008.
10. Gambino G., Lombardo M. C., Sammartino M., Sciacca V. Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion // Physical Review E. 2013. 88. С. 042925.
11. Vazquez J. L. The porous medium equation: mathematical theory. Oxford : Clarendon Press, 2007.

Казаков Александр Леонидович

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: kazakov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович

Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН (ИМаш УрО РАН)

E-mail: lfs@imach.uran.ru



О МАЛЫХ РЕШЕНИЯХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2023 г. Р. Ю. ЛЕОНТЬЕВ

**Аннотация.** Рассматривается нелинейное операторное уравнение с векторным параметром. Теорема о неявном операторе не выполняется, так как оператор в главной части уравнения не является непрерывно обратимым в заданной точке. Доказанная теорема дает достаточные условия существования и позволяет строить малое непрерывное решение в некоторой области, которая названа секториальной окрестностью нуля. Результаты иллюстрируются примером.

**Ключевые слова:** банахово пространство, нелинейный оператор, операторное уравнение, существование решения, метод последовательных приближений.

**AMS Subject Classification:** 47J99

Пусть  $X, Y$  – банаховы пространства,  $\Lambda$  – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где  $F : X \times \Lambda \rightarrow Y$ .

Оператор  $F$  является непрерывным в окрестности нуля по  $x$  и  $\lambda$ , причем справедливо равенство  $F(0, 0) = 0$ . Ниже приводятся достаточные условия, при которых существует малое непрерывное решение уравнения (1) такое, что  $x(0) = 0$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что открытое множество  $S \subset \Lambda$  – секториальная окрестность точки  $0 \in \Lambda$ , если  $0 \in \partial S$ , где  $\partial S$  – граница множества  $S$ .

Предположим, что оператор  $F(x, \lambda)$  имеет производную Фреше по первому аргументу, непрерывную по  $x$  и  $\lambda$  в окрестности нуля, и пусть выполнена оценка:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ для } \forall \lambda \in S, \quad (2)$$

где  $a(\lambda)$  непрерывный функционал,  $a(\lambda) : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ;  $a(0) = 0$  (т. е.  $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} a(\lambda) = 0$ );  $S$  – секториальная окрестность нуля.

Заметим, что стандартная теорема о неявном операторе в данном случае не может быть применена, так как оператор  $F_x(0, 0)$  не имеет ограниченного обратного (см. оценку (2)).

В работе [6] были выделены классы уравнений, когда при выполнении оценки вида (2) уравнение (1) приводится к эквивалентному уравнению, имеющему единственное малое решение, существование которого можно доказать, используя принцип сжимающих отображений, и построить асимптотику решения с помощью метода последовательных приближений. Ряд результатов, продолжающих это исследование, представлен в работах [1–5].

Пусть  $r$  – положительное число и  $S$  – секториальная окрестность нуля. Введем множество:

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}.$$

**Определение 2.** Если найдутся числа  $r_0 \in (0, r]$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что из всех малых решений уравнения (1), определенных в области  $\Omega$ , только одно решение  $x^*(\lambda)$  попадает в область

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S, 0 < \|\lambda\| < \varepsilon\},$$

то решение  $x^*(\lambda)$  будем называть минимальным решением уравнения (1) в области  $S$ , непрерывным в точке  $\lambda = 0$  (далее кратко «минимальной непрерывной ветвью»).

Далее для уравнения (1) приведена теорема, условия которой являются достаточными для существования минимальной непрерывной ветви в секториальной окрестности нуля  $S_0 \subseteq S \subset \Lambda$ .

**Теорема 1.** Пусть в области  $\Omega$  выполнены условия:

- 1) оператор  $F(x, \lambda)$  непрерывен по  $x$  и  $\lambda$  и имеет частную производную Фреше  $F_x(x, \lambda)$ , непрерывную по  $x$  и  $\lambda$ ;
- 2)  $F(0, 0) = 0$ ; оператор  $F_x(0, \lambda)$  непрерывно обратим при  $\forall \lambda \in S$  на всем пространстве  $Y$ , причем при  $S \ni \lambda \rightarrow 0$  имеет место оценка (2);
- 3) найдется некоторая константа  $L > 0$ , что для каждого  $\lambda \in S$  справедливо неравенство:

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|;$$

- 4) имеет место оценка

$$\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$$

при  $S \ni \lambda \rightarrow 0$ .

Тогда найдется число  $r_0 \in (0, r]$  и секториальная окрестность нуля  $S_0 \subseteq S$  такие, что для каждого  $\lambda \in S_0$  уравнение (1) имеет в шаре  $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$  минимальную непрерывную ветвь  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$ , которую можно построить методом последовательных приближений.

*Доказательство.* Перепишем уравнение (1) в эквивалентной форме

$$x = x - F_x^{-1}(0, \lambda)F(x, \lambda),$$

которая справедлива для  $\forall \lambda \in S$  в силу оценки (2) и сделаем замену  $x = a(\lambda)V$ , где  $a(\lambda)$  – функционал из (2). Получим

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0, \lambda)F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Обозначим правую часть последнего равенства с помощью  $\Phi(V, \lambda)$

$$V = \Phi(V, \lambda). \quad (3)$$

Для последнего уравнения можно доказать, что существуют секториальная окрестность нуля  $S_0 \subseteq S$  и число  $0 < r_0 \leq r$  такие, что для  $\forall \lambda \in S_0$  в шаре  $\|V\| \leq r_0$  к уравнению (3) применим принцип сжимающих отображений.

Тогда на основании принципа сжимающих отображений уравнение (3) для  $\forall \lambda \in S_0$  в шаре  $\|V\| \leq r_0$  имеет единственное малое решение, которое можно строить методом последовательных приближений по формуле

$$V_n = \Phi(V_{n-1}, \lambda), \quad (4)$$

сходящимся при любом начальном приближении  $V_0$  из шара  $\|V_0\| \leq r_0$ , в том числе при  $V_0 = 0$ . Тогда искомое решение уравнения (3)  $V_* = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ , а  $x_* = a(\lambda)V_*$  будет малым решением уравнения (1). Следует отметить, что уравнение (1) кроме  $x_*$  может иметь и другие малые решения.  $\square$

**Пример 1.** Покажем, что уравнение

$$F(x, \lambda) \equiv \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^3(s) ds - f(t, \lambda) = 0,$$

где  $x(t) \in C_{[0,1]}$ ,  $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$ ,  $m(t) \in C_{[0,1]}$ ,  $n > 2$ ,  $S$  – суть проколота окрестность нуля, имеет непрерывное при  $t \in [0, 1]$  решение  $x_\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $S \ni \lambda \rightarrow 0$ .

*Решение.* Дифференциал Фреше будет иметь вид:

$$F_x(x, \lambda)h = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) - 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds.$$

Согласно условиям теорем, оценка на норму оператора  $F_x^{-1}(0, \lambda)$  должна удовлетворять условию (2). Найдем  $F_x^{-1}(0, \lambda)$ . Для этого разрешим уравнение

$$\int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) = f(t) \quad (5)$$

относительно  $h(t)$ , где

$$\int_0^1 ts[\cdot] ds + \lambda[\cdot] \equiv F_x(0, \lambda).$$

Вынесем множитель  $t$  за знак интеграла и введем обозначение:

$$\int_0^1 s \cdot h(s) ds = C_1. \quad (6)$$

Тогда из (5) получим:

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}(f(t) - tC_1).$$

Подставляя полученное выражение для  $h(t)$  в равенство (6), получим алгебраическое уравнение относительно  $C_1$ , после разрешения которого получим:

$$C_1 = \frac{3}{3\lambda + 1} \int_0^1 sf(s) ds.$$

Тогда оператор  $F_x^{-1}(0, \lambda)$  имеет вид:

$$F_x^{-1}(0, \lambda)f = \frac{f(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 sf(s) ds.$$

Следовательно, оценка (2) выполняется:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0.$$

Теперь проверим, что выполнены остальные условия теоремы 1:

1) оператор  $F(x, \lambda)$  является непрерывным по  $x$  и  $\lambda$  в некоторой окрестности нуля  $\|x\| \leq r$ ,  $|\lambda| < \rho$ . Производная Фреше  $F_x(x, \lambda)$  тоже непрерывна по  $x$  и  $\lambda$  в некоторой окрестности нуля  $\|x\| \leq r$ ,  $|\lambda| < \rho$ ;

2) оператор  $F_x(0, \lambda)$  непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности нуля, и имеет место оценка (2);

3) из следующей оценки:

$$\|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| = \left\| 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds \right\| \leq 3r\|x\|\|h\|,$$

где  $\|x\| \leq r$ , следует, что

$$\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq 3r\|x\|;$$

4)  $\|F(0, \lambda)\| = \|f(t, \lambda)\| = \|m(t)\lambda^n\| = \|m(t)\|\lambda^n$ , где  $n > 2$ .



Следовательно, выполнены все условия теоремы 1, что позволяет утверждать, что данное уравнение имеет решение  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  в некоторой проколотой окрестности нуля  $0 < |\lambda| < r_0$ . Это решение будет иметь вид  $x = \lambda V$ , где  $V(\lambda)$  строится методом последовательных приближений при начальном приближении  $V_0 = 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев Р. Ю., Сидоров Н. А.* Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика 2011. 4, № 3. С. 116–123.
2. *Леонтьев Р. Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. 2009. № 9. С. 77–83.
3. *Леонтьев Р. Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений // Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования : тр. Междунар. конф.. М. : РУДН, 2009. С. 276–278.
4. *Леонтьев Р. Ю.* Итерационные методы поиска решений нелинейных уравнений в секториальных областях // Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам.. М. : РУДН, 2015. С. 116.
5. *Леонтьев Р. Ю.* О малых решениях нелинейных операторных уравнений с векторным параметром // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. мол. специалистов, аспирантов и студентов.. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. С. 80–83.
6. *Сидоров Н. А.* Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы // Нелинейные граничные задачи. 2004. № 14. С. 161–164.

Леонтьев Роман Юрьевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: romanisu@ya.ru



## ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2023 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

**Аннотация.** Построена гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных мягких возбуждений неабелевой плазмы, взаимодействующих с высокоэнергетической цветозаряженной частицей. Проведено обобщение скобки Ли – Пуассона на случай сплошной среды с бозонными нормальными полевыми переменными  $a_{\mathbf{k}}^a$  и  $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ , и неабелевым цветным зарядом  $Q^a$  и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Выписаны канонические преобразования, включающие одновременно как бозонные степени свободы мягких коллективных возбуждений, так и степени свободы жесткой пробной частицы, связанной с ее цветным зарядом. Найден явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной частице. Построена самосогласованная система кинетических интегродифференциальных уравнений больцмановского типа.

**Ключевые слова:** гамильтонов формализм, скобка Ли-Пуассона, каноническое преобразование, унимодулярная группа, кинетическое уравнение, глюонная плазма.

**AMS Subject Classification:** 34C14, 82D99

**1. Введение.** В настоящей работе мы расширили гамильтонов анализ динамики мягких фермионных и бозонных возбуждений в горячей плазме с неабелевым типом взаимодействием, проведенный в [1,2], на жесткий сектор плазменных возбуждений. Здесь мы сосредоточим свое исследование на изучении процессов рассеяния мягких плазменных волн на жестких частицах в рамках формализма реального времени, основанного на кинетических уравнениях для мягких мод. Для достаточно высокого уровня мягких плазменных возбуждений процессы рассеяния плазмона и плазмона на жесткой частице будут давать вклады того же порядка в правую часть соответствующих уравнений Больцмана, что и вклады от процессов рассеяния мягких возбуждений друг на друге.

**2. Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жесткой частицы.** Рассмотрим потенциал калибровочного поля  $A_{\mu}^a(x)$ , который представим в виде разложения на продольно-поляризованные плоские волны [3]

$$A_{\mu}^a(x) = \int d\mathbf{k} \left( \frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^a e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^l t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon_{\mu}^{*l}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{*a} e^{i\omega_{\mathbf{k}}^l t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\},$$

где  $\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})$  – вектор поляризации ( $\mathbf{k}$  – волновой вектор), а  $\omega_{\mathbf{k}}^l$  – дисперсионное соотношение для продольной моды. Амплитуды продольных возбуждений  $a_{\mathbf{k}}^a$  считаем обычными (комплексными) случайными функциями. Среднее значение произведения двух бозонных амплитуд имеет вид

$$\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}'}^{a'} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$  плотность числа продольных плазменных волн. Цветные индексы  $a, b, c, \dots$  пробегает значения  $1, 2, \dots, N^2 - 1$  для унимодулярной группы  $SU(N)$ . Для случая непрерывной среды в

---

Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа” (№ гос регистрации: 121041300058-1).

качестве определения скобки Ли-Пуассона полагаем следующее выражение:

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta a_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta G}{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta F}{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta G}{\delta a_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + \frac{\partial F}{\partial Q^a} \frac{\partial G}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c.$$

Первый член в правой части – это стандартная каноническая скобка Пуассона. Во втором члене  $f^{abc}$  – антисимметричные структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{su}(N)$ . Уравнения Гамильтона для функций  $a_{\mathbf{k}}^a$ ,  $a_{\mathbf{k}}^{*a}$  и  $Q^a$  имеют, соответственно, вид

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} = -i \{a_{\mathbf{k}}^a, H\} \equiv -i \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^{*a}}, \quad \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} = -i \{a_{\mathbf{k}}^{*a}, H\} \equiv i \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^a}, \quad (2.2)$$

$$\frac{dQ^a}{dt} = \{Q^a, H\} = \frac{\partial H}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c, \quad Q^a|_{t=t_0} = Q_0^a. \quad (2.3)$$

Здесь функция  $H = H^{(0)} + H_{int}$  представляет собой гамильтониан для системы плазмонов и жесткой тестовой частицы, где  $H^{(0)}$  – гамильтониан свободного поля:  $H^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}}^a$ ,  $H_{int}$  – гамильтониан взаимодействия плазмонов и жесткой цветозаряженной частицы. В приближении малых амплитуд  $H_{int}$  может быть представлен в виде формального интегро-степенного ряда по бозонным полевым функциям  $a_{\mathbf{k}}^a$  и  $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ , а также по цветному заряду  $Q^a$ :

$$H_{int} = H^{(3)} + H^{(4)} + \dots,$$

где гамильтониан взаимодействия третьего порядка имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} H^{(3)} = & \int d\mathbf{k} \left[ \varphi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^a Q^a + \varphi_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a \right] \\ & + \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \\ & + \frac{1}{3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right\} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и, соответственно, гамильтониан взаимодействия четвертого порядка имеет вид

$$H^{(4)} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 \left\{ T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} Q^{a_2} + (\text{компл. сопр.}) \right\} + i \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} Q^{a_2}.$$

**3. Канонические преобразования.** Рассмотрим преобразования от нормальной полевой переменной  $a_{\mathbf{k}}^a$  и классического цветного заряда  $Q^a$  к новым полевой переменной  $c_{\mathbf{k}}^a$  и цветному заряду  $\mathcal{Q}^a$ :

$$a_{\mathbf{k}}^a = a_{\mathbf{k}}^a(c_{\mathbf{k}}^a, c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{Q}^a), \quad Q^a = Q^a(c_{\mathbf{k}}^a, c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{Q}^a). \quad (3.1)$$

Потребуем, чтобы уравнения Гамильтона в терминах новых переменных имели вид (2.2) и (2.3) с одним и тем же гамильтонианом  $H$ . Несложные, но достаточно громоздкие вычисления приводят к двум системам интегральных соотношений. Первая система имеет следующий вид:

$$\int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d = \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.2a)$$

$$\int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d = 0, \quad (3.2b)$$

$$\int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta \mathcal{Q}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta \mathcal{Q}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial \mathcal{Q}^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d = 0. \quad (3.2c)$$

Вторая система записывается аналогичным образом. Представим канонические преобразования (3.1) в виде интегро-степенных рядов по нормальной полевой переменной  $c_{\mathbf{k}}^a$  и цветному заряду  $\mathcal{Q}^a$ . В этом случае первое преобразование в (3.1) вплоть до членов четвертого порядка в  $c_{\mathbf{k}}^a$  и  $\mathcal{Q}^a$  имеет следующий вид:

$$a_{\mathbf{k}}^a = c_{\mathbf{k}}^a + F_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1 \left[ \tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + \tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \right] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3) a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{* a_2} \right] \\
& + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[ W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a a_1 a_2 a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2 a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3) a a_1 a_2 a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{* a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Мы считаем, что степень нелинейности цветового заряда равна двум. Аналогично, наиболее общее разложение в ряд для второго преобразования в (3.1) вплоть до членов четвертого порядка задается следующим выражением:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^a &= \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1 \left[ M_{\mathbf{k}_1}^{a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_0} + M_{\mathbf{k}_1}^{* a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} \mathcal{Q}^{a_2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_0} \right] \\
& + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[ M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a a_1 a_2 a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_0} + M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2 a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_0} \right. \\
& \quad \left. + M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a a_1 a_2 a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{* a_2} \mathcal{Q}^{a_3} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_0} \right] + \dots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Подставляя разложения (3.3) и (3.4) в систему условий каноничности (3.2), мы получаем достаточно нетривиальные интегральные соотношения, связывающие между собой различные коэффициентные функции.

**4. Эффективный гамильтониан четвертого порядка  $\mathcal{H}^{(4)}$ .** После исключения гамильтониана  $H^{(3)}$ , уравнение (2.4), мы получаем явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка  $\mathcal{H}^{(4)}$ , который описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой цветозаряженной частице:

$$\mathcal{H}^{(4)} = i \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a. \tag{4.1}$$

Здесь *полная эффективная амплитуда*  $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$  может быть представлена как сумма двух вкладов

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = -i \left[ \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right] \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 a} + \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 a}, \tag{4.2}$$

где, в свою очередь, эффективная амплитуда  $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 a}$  имеет следующую структуру:

$$\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 a} = T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2} + f^{a_1 a_2 a} \left\{ \frac{\varphi_{\mathbf{k}_1}^* \varphi_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2} + 2i \left( \frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \varphi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^*}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} - \frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^* \varphi_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} \right) \right\}.$$

Первый член в правой части (4.2) имеет резонансный коэффициент  $[\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)]$ , который является следствием законов сохранения импульса и энергии в исследуемом процессе рассеяния. В случае строго выполнения законов он равен нулю.

**5. Кинетические уравнения для мягких глюонных возбуждений.** Перейдем теперь к построению кинетических уравнений, описывающих процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. В качестве гамильтониана взаимодействия мы рассмотрим эффективный гамильтониан  $\mathcal{H}^{(4)}$ , выражение (4.1). Уравнения движения для бозонных нормальных полевых переменных  $c_{\mathbf{k}}^a$  и  $c_{\mathbf{k}}^{*b}$ , и цветового заряда  $\mathcal{Q}^a$  определяются соответствующими уравнениями Гамильтона (2.2) и (2.3). Для мягких бозе-возбуждений находим

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}'}^{a'}}{\partial t} = -i \left\{ c_{\mathbf{k}'}^{a'}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)} \right\} = -i \left( \omega_{\mathbf{k}'}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}' \right) c_{\mathbf{k}'}^{a'} + \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a' a_1 d} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_0}, \tag{5.1}$$

и соответствующее уравнение на сопряженный бозе-оператор  $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ . Для классического цветового заряда получаем

$$\frac{d\mathcal{Q}^d}{dt} = \left\{ \mathcal{Q}^d, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)} \right\} = \frac{\partial (\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)})}{\partial \mathcal{Q}^d} f^{dd'e} \mathcal{Q}^e = i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a_1 a_2 d'} c_{\mathbf{k}_1}^{* a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^e. \tag{5.2}$$

Кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$  определяется с использованием уравнений Гамильтона (5.1) и (5.2) и определения (2.1):

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}}{\partial t} = -i \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}} (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa'} - \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}^* (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \tag{5.3}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i0} \left( (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[ (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d)^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - i0} \left( (T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[ (T^e T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) \right\}.$$

Рассмотрим следующую цветовую декомпозицию матричной функции  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ :

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} = \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^l + (T^c)^{aa'} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}}^l. \quad (5.4)$$

Определим кинетические уравнения для скалярных бесцветной и цветной частей плотности числа плазмонов, т.е. для  $N_{\mathbf{k}}^l$  и  $W_{\mathbf{k}}^l$ . Используя цветовое разложение (5.4) и формулы для следов произведения двух и трех цветных матриц (генераторов) в присоединенном представлении [4], находим первый момент по цвету для уравнения (5.3)

$$d_A \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = 2N \mathfrak{q}_2(t) (\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l \quad (5.5)$$

$$- N \mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}|^2 \left\{ (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l) \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)).$$

Здесь введено обозначение для бесцветной квадратичной комбинации усредненного цветного заряда  $\mathfrak{q}_2(t) \equiv \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle$ . Коэффициент  $d_A \equiv N^2 - 1$  в левой части (5.5) является инвариантом для группы  $SU(N)$ .

Вернемся к матричному кинетическому уравнению (5.3). Свернем левую и правую части этого уравнения с цветовой матрицей  $(T^s)^{a'a}$ . После несколько громоздких вычислений следов от произведения генераторов в присоединенном представлении вплоть до пятого порядка кинетическое уравнение для  $W_{\mathbf{k}}^l$  примет вид:

$$N \frac{\partial (\langle \mathcal{Q}^s \rangle W_{\mathbf{k}}^l)}{\partial t} = 2N (\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}) N_{\mathbf{k}}^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle$$

$$- \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}|^2 \left\{ 2\delta^{sd} \delta^{ce} + \frac{1}{4} N d^{sd\lambda} d^{ce\lambda} \right\} (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1))$$

$$+ \frac{1}{2} N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}|^2 N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)),$$

где  $d^{abc}$  – симметричные структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{su}(N)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю., Гитман Д. М. Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2020. 157. С. 327–341.
2. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction // Int. J. Mod. Phys. A. 2023. 38. P. 2350015(77).
3. Hakim R. Introduction to relativistic statistical mechanics: classical and quantum. Singapore : World Scientific Publishing Co., 2011. 538 pp.
4. Haber H. E. Useful relations among the generators in the defining and adjoint representations of  $SU(N)$  // SciPost Phys. Lect. Notes. 2021. 21. P. 1–11.

Марков Юрий Адольфович

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

E-mail: markov@icc.ru



## О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕАБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

© 2023 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

**Аннотация.** Выписана самосогласованная система кинетических уравнений бальцмановского типа, учитывающая эволюцию во времени мягких возбуждений неабелевой плазмы при взаимодействии с внешней высокоэнергичной цветозаряженной частицей. На основе этих уравнений рассмотрена модельная задача эволюции двух взаимодействующих бесконечно узких волновых пакетов. Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая динамику взаимодействия бесцветной  $N_{\mathbf{k}}^l$  и цветовой  $W_{\mathbf{k}}^l$  компонент плотности числа коллективных бозонных возбуждений. Построено точное решение данной системы в параметрической форме.

**Ключевые слова:** кинетическое уравнение, глюонная плазма, волновой пакет, унимодулярная группа, уравнение Абеля второго рода.

**AMS Subject Classification:** 34C14, 82D99

**1. Введение.** В работе [1] нами была развита гамильтонова теория для коллективных продольно-поляризованных бозе-возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической тестовой цветозаряженной частицей, распространяющейся через высокотемпературную чисто глюонную плазму. Было проведено обобщение скобки Ли-Пуассона на случай составной системы: сплошной среды, описываемой бозонными нормальными переменными поля  $a_{\mathbf{k}}^a$  и  $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ , и жесткой тестовой частицей с неабелевым цветным зарядом  $Q^a$  и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Были выписаны канонические преобразования, включающие одновременно как бозонную степень свободы мягких коллективных возбуждений, так и степень свободы жесткой тестовой частицы, связанной с ее цветным зарядом. Нами была получена полная система условий каноничности для этих преобразований и введено в рассмотрение важное понятие плотности числа плазмонов  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ , которая является нетривиальной матрицей во внутреннем цветовом пространстве. Найден явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего упругое рассеяние плазмона на жесткой цветозаряженной частице. Для функции  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$  было определено матричное кинетическое уравнение. На основе цветовой декомпозиции матричной функции

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} = \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^l + (T^c)^{aa'} \langle Q^c \rangle W_{\mathbf{k}}^l$$

были вычислены первый и второй моменты матричного кинетического уравнения относительно цвета, определяющие скалярные кинетические уравнения для бесцветной  $N_{\mathbf{k}}^l$  и цветовой  $W_{\mathbf{k}}^l$  частей данной декомпозиции. Здесь  $\langle Q^c \rangle$  – среднее значение цветного заряда тестовой частицы, а матрица  $T^a$  определена как  $(T^a)^{bc} \equiv -i f^{abc}$ , где  $f^{abc}$  – антисимметричные структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{su}(N)$ . Цветные индексы  $a, b, c, \dots$  пробегает значения  $1, 2, \dots, N^2 - 1$ .

---

Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа” (№ гос регистрации: 121041300058-1).

**2. Система кинетических уравнений для мягких глюонных возбуждений.** В данном разделе выпишем исходную систему интегро-дифференциальных уравнений на скалярные плотности числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$  и  $W_{\mathbf{k}}^l$ , полученные в [1]:

$$d_A \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = 2q_2(t) N_c (\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l \quad (2.1)$$

$$- q_2(t) N_c \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \left\{ (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l) \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)),$$

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = -\frac{1}{2} A(t) W_{\mathbf{k}}^l + 2 (\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) N_{\mathbf{k}}^l \quad (2.2)$$

$$- \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \left\{ \rho q_2(t) (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)),$$

где  $\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}$  – амплитуда упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице; функции  $q_2(t)$  и  $A(t)$  определяются, соответственно, выражениями  $q_2(t) \equiv \langle \mathcal{Q}^a \rangle \langle \mathcal{Q}^a \rangle$ ,

$$A(t) \equiv N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}|^2 N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \quad (2.3)$$

Коэффициент  $d_A \equiv N^2 - 1$  в левой части (2.1) является инвариантом для группы  $SU(N)$ , а коэффициент  $\rho$  в последнем уравнении равен 1 для цветовой группы  $SU(2)$  и  $3/4$  для цветовой группы  $SU(3)$ . Только для этих частных значений величина  $\rho$  не зависит от начального значения цветного заряда частицы.

**3. Взаимодействие бесконечно узких волновых пакетов.** Для получения некоторого представления о поведении решения системы кинетических уравнений (2.1) и (2.2) рассмотрим модельную задачу взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов с характерными волновыми векторами  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}'_0$ . Представим скалярные плотности числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$  и  $W_{\mathbf{k}}^l$  в следующем виде:

$$N_{\mathbf{k}}^l(t) = N_1(t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + N_2(t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0), \quad W_{\mathbf{k}}^l(t) = W_1(t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + W_2(t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0), \quad (3.1)$$

при этом считаем, что  $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{k}'_0$ . Подставим (3.1) в левую и правую части уравнений (2.1) и (2.2). В итоге получаем систему из четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= A_{13} W_1 - \frac{N}{d_A} q_2(t) B (N_1 W_2 - N_2 W_1), & \frac{dN_2(t)}{dt} &= A_{24} W_2 + \frac{N}{d_A} q_2(t) B (N_1 W_2 - N_2 W_1), \\ \frac{dW_1(t)}{dt} &= A_{31} N_1 - \frac{1}{2} A(t) W_1 + B N_1 N_2, & \frac{dW_2(t)}{dt} &= A_{42} N_2 - \frac{1}{2} A(t) W_2 + B N_1 N_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Матричные элементы  $A_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$  определяются следующими выражениями:

$$A_{31} = 2 (\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}), \quad A_{13} = \frac{N_c}{d_A} q_2(t) A_{31}, \quad A_{42} = 2 (\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}'_0}), \quad A_{24} = \frac{N_c}{d_A} q_2(t) A_{42},$$

а коэффициент  $B$  имеет вид:  $B = (1/2) N_c q_2(t) |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0}|^2 (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}_0}^l - \omega_{\mathbf{k}'_0}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0))$ . Заметим, что этот коэффициент, вообще говоря, является *обобщенной* функцией.

С целью дальнейшего упрощения проанализируем полученную систему. Матричные элементы  $A_{13}$ ,  $A_{24}$ ,  $A_{31}$  и  $A_{42}$  перед линейными членами в правых частях (3.2) пропорциональны коэффициентам  $\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}(\mathbf{v})$  и  $\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}'_0}(\mathbf{v})$ , которые связаны с бесстолкновительным затуханием Ландау мягких глюонных колебаний и, следовательно, должны содержать дельта-функцию Дирака, отражающую соответствующие законы сохранения энергии и импульса:

$$\text{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}(\mathbf{v}) \sim \int \frac{d\Omega_{\mathbf{v}'}}{4\pi} w_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}; \mathbf{k}_0) (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}_0}^l - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}_0),$$

где  $w_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}; \mathbf{k}_0)$  – вероятность процесса затухания Ландау и  $d\Omega_{\mathbf{v}'}$  – телесный угол интегрирования. Явный вид этой вероятности можно получить, используя найденное в [1] выражение для

амплитуды рассеяния  $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ . Однако, как известно, *линейное* затухание Ландау кинематически запрещено в горячей глюонной плазме, поэтому эти матричные элементы можно считать равными нулю:  $A_{13} = A_{24} = A_{31} = A_{42} = 0$ . Далее рассмотрим члены последних двух уравнений в (3.2), содержащие функцию  $A(t)$ . В силу определения (2.3) эта функция квадратична по бесцветной плотности числа плазмонов, и поэтому члены  $A(t)W_1$  и  $A(t)W_2$  в (3.2) имеют третий порядок. При построении кинетических уравнений (2.1) и (2.2) мы ограничились линейным и квадратичным вкладами по плотности числа плазмонов. По этой причине, в пределах принятой точности, в последних двух уравнениях в (3.2) следует отбросить члены с функцией  $A(t)$ , а в первых двух уравнениях полагать функцию  $\mathbf{q}_2(t)$  равной ее начальному значению, т.е.  $\mathbf{q}_2(t) \simeq \mathbf{q}_2(t_0) \equiv \mathbf{q}_2^0$ . Учитывая все вышесказанное, систему четырех уравнений (3.2) можно свести к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = \beta B [N_1(C_2 - W_1) + W_1(C_1 - N_1)], \\ \frac{dW_1(t)}{dt} = \beta N_1(C_1 - N_1), \end{cases} \quad (3.3)$$

где для краткости мы обозначили  $\beta \equiv N \mathbf{q}_2^0 / d_A$ . Функции  $N_2(t)$  и  $W_2(t)$  определяются из соотношений вида

$$N_1(t) + N_2(t) = C_1, \quad W_1(t) - W_2(t) = C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – некоторые константы. Очевидно, что эта система имеет две стационарные точки, одна из которых тривиальна:  $N_1 = W_1 = 0$ , а вторая определяется как  $N_1 = C_1$ ,  $W_1 = C_2$ .

Ниже будет показано, что при определенном соотношении между константами  $C_1$  и  $C_2$  можно получить точное решение системы (3.3). Для этого первым шагом, в силу автономности правых частей, приведем эту системы к одному уравнению

$$\frac{dN_1}{dW_1} = \beta \left( \frac{C_2 - W_1}{C_1 - N_1} + \frac{W_1}{N_1} \right)$$

или в несколько иной форме, определяющей  $W_1$  как функцию от  $N_1$

$$[(2N_1 - C_1)W_1 - C_2N_1] \frac{dW_1}{dN_1} = \frac{1}{\beta} (N_1^2 - C_1N_1). \quad (3.4)$$

**4. Построение точного решения системы (3.3).** Перепишем систему (3.3) и уравнение (3.4) в несколько иной форме, введя общепринятые в теории дифференциальных уравнений обозначения. Мы полагаем  $y \equiv W_1$ ,  $x \equiv N_1$ , тогда вместо (3.3) имеем

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = x(C_1 - x), \\ \frac{dx(t)}{dt} = \beta [x(C_2 - y) + y(C_1 - x)], \end{cases} \quad (4.1)$$

а вместо (3.4), в свою очередь, можем записать

$$[(2x - C_1)y - C_2x] \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta} x(x - C_1), \quad (4.2)$$

или в стандартных обозначениях [2]:

$$[g_1(x)y + g_0(x)] \frac{dy}{dx} = f_0(x), \quad (4.3)$$

где

$$g_0(x) \equiv -C_2x, \quad g_1(x) \equiv 2x - C_1, \quad f_0(x) \equiv \frac{1}{\beta} x(x - C_1).$$

В системе (4.1) мы избавились от параметра  $B$ , переопределив формально время  $t \rightarrow t/B$ . Уравнение (4.3) относится к классу уравнений Абеля второго рода. Первым шагом приведем его к “нормальной” форме. Для этой цели сначала произведем замену неизвестной функции

$$w = y + \frac{g_0(x)}{g_1(x)}.$$



Это преобразование приводит исходное уравнение (4.2) к виду:

$$w \frac{dw}{dx} = F_1(x)w + F_0(x), \quad (4.4)$$

где

$$F_1(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{g_0(x)}{g_1(x)} \right) = \frac{C_1 C_2}{(2x - C_1)^2}, \quad F_0(x) = \frac{f_0(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{\beta} \frac{x(x - C_1)}{2x - C_1}.$$

Далее производится замена аргумента функции

$$\xi = \int F_1(x) dx = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{2x - C_1}, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4\xi} C_1 C_2,$$

что позволяет привести уравнение (4.4) к окончательному виду

$$w \frac{dw}{d\xi} = w + F(\xi), \quad \text{где} \quad F(\xi) = \frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \frac{C_1^2}{8\beta} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{C_2^2}{4\xi^3} \right). \quad (4.5)$$

Для уравнения (4.5) при определенном соотношении между параметрами  $C_1$  и  $C_2$ , а именно при  $C_2^2 = C_1^2/2\beta$  существует точное решение в параметрической форме (уравнение 1.3.7. в [2]):

$$\xi = \frac{a}{\tau} (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{1/2}, \quad w = a \left[ \frac{1 + \tau}{\tau} (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{1/2} - \frac{1}{2} \tau (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{-1/2} \right],$$

где  $\tau$  – параметр,  $C$  – произвольная постоянная и  $a^2 = C_1^2/4\beta$ . Возвращаясь к исходной функции  $y$  и ее аргументу  $x$ , определим точное решение уравнения (4.2):

$$x = x(\tau, C) = \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4a} C_1 C_2 \frac{\tau}{f(\tau)}, \quad y = y(\tau, C) = a \left[ \frac{1 + \tau}{\tau} f(\tau) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{f(\tau)} \right] + \frac{C_2 x}{2x - C_1}. \quad (4.6)$$

Здесь введено обозначение  $f(\tau) \equiv (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{1/2}$ . Решение исходной динамической системы (4.1) определяется формулами

$$x = x(\tau, C), \quad y = y(\tau, C), \quad t = \frac{1}{\beta} \int \frac{\dot{x}_\tau d\tau}{[C_1 - 2x(\tau, C)]y(\tau, C) + C_2 x(\tau, C)} + \tilde{C}.$$

Здесь  $\dot{x}_\tau \equiv dx(\tau, C)/d\tau$ , а  $\tilde{C}$  – еще одна произвольная константа. Последнее соотношение определяет неявную зависимость параметра  $\tau$  от времени  $t$ :  $\tau = \tau(t, C, \tilde{C})$ . Используя формулы (4.6), можно найти зависимость  $x$  и  $y$  и, тем самым, исходных функций  $N_1$  и  $W_1$  от времени  $t$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu.* Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: plasmon – hard particle scattering /// arXiv: [hep-th/2307.15390v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/2307.15390v1).
2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. Москва : Наука, 1993. 464 с.

Марков Юрий Адольфович

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

E-mail: [markov@icc.ru](mailto:markov@icc.ru)

Маркова Маргарита Анатольевна

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

E-mail: [markova@icc.ru](mailto:markova@icc.ru)

Марков Никита Юрьевич

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

E-mail: [markov@icc.ru](mailto:markov@icc.ru)



## ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ВОЛЬТЕРРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

© 2023 г. В. А. МУРАТОВ, Д. Н. СИДОРОВ, А. Н. ТЫНДА

**Аннотация.** На основании общей модели нелинейной динамической системы с памятью с использованием рядов Вольтерра была предложена модель, в которой два слагаемых ряда Вольтерра, а ядра интегральных операторов описываются с помощью системы ортогональных многочленов Чебышева 1-го рода. Для нахождения ядер решается переопределенная система линейных уравнений с помощью метода наименьших квадратов. Данный метод идентификации нелинейных динамических систем был протестирован на модельной задаче.

**Ключевые слова:** нелинейные динамические системы, ряд Вольтерра, многочлены Чебышева, метод наименьших квадратов.

**AMS Subject Classification:** 93E24, 45D05

**1. Идентификация нелинейной динамической системы.** Интенсивно развивается теория и приложения математического моделирования нелинейных динамических систем в вопросах идентификации и обработки сигналов. Одним из подходов идентификации нелинейных динамических систем является моделирование с помощью интегро-степенных рядов Вольтерра.

Определение того, что в настоящее время известно как ряды Вольтерра, было впервые введено в 1887 году итальянским математиком Вито Вольтерра [4].

Любая линейная система с памятью может быть описана с помощью следующего интеграла:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)ds, \quad (1)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  – это вход и выход системы, соответственно,  $h(s)$  – ядро интегрального оператора. С другой стороны, нелинейная система без памяти может быть описана с помощью степенного ряда:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i(t), \quad (2)$$

где  $a_i$  – коэффициенты степенного ряда.

Подход описания нелинейной динамической системы с памятью с помощью рядов Вольтерра предполагает комбинирование (1) и (2):

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(s_1, s_2, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n x(t-s_i) ds_i, \quad (3)$$

где  $t$  – время,  $x(t)$  и  $y(t)$  – вход и выход динамической системы, соответственно,  $K_n(s_1, s_2, \dots, s_n)$  – ядро интегрального уравнения порядка  $n$ . Далее в тексте предполагается, что  $t \in [0; 1]$ .

Проблема идентификации ядер Вольтерра является основной при использовании данного метода.

Отметим, что для идентификации моделей Вольтерра цифровых предсказаний для усилителей мощности беспроводных передатчиков широко используется метод наименьших квадратов ([2]).

1.1. *Используемая модель описания нелинейной динамической системы.* На основе общей модели (3) была взята следующая модель описания нелинейных динамических систем на основе двух слагаемых ряда Вольтерра:

$$y(t) = \int_0^t K_1(s)x(t-s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2. \quad (4)$$

В работе предложен и описан способ аппроксимации ядер модели с помощью системы ортогональных многочленов Чебышева 1-го рода  $T_i, i \geq 0$ :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 0, \\ T_1(x) &= x, \\ T_i(x) &= 2xT_{i-1}(x) - T_{i-2}(x), \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

Полагается, что ядра имеют следующий вид:

$$\tilde{K}_{1,m}(s) = \sum_{i=1}^m A_i \cdot T_{i-1}(s), \quad (5)$$

$$\tilde{K}_{2,m_1,m_2}(s_1, s_2) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} C_{ij} \cdot T_{i-1}(s_1) \cdot T_{j-1}(s_2), \quad (6)$$

где  $m, m_1, m_2$  – количество слагаемых для аппроксимации,  $A_i, C_{ij}$  – некоторые коэффициенты.

Подставив (5) и (6) в модель (4) и преобразовав, получаем:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \int_0^{t_k} B_i(s)x(t_k-s)ds + \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} C_{ij} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} B_i(s_1)B_j(s_2)x(t_k-s_1)x(t_k-s_2)ds_1ds_2. \quad (7)$$

Пусть заданы вход нелинейной динамической системы  $x(t)$  и выход  $y(t)$ . Тогда задача идентификации данной системы сводится к нахождению таких коэффициентов  $A_i$  и  $C_{ij}$  модели (7), которые при входе  $x(t)$  наилучшим образом приближают  $\tilde{y}(t)$  к  $y(t)$ .

Проведя  $k$  штук экспериментальных измерений ( $k \geq m + m_1m_2$ ), получается переопределенная система линейных уравнений относительно коэффициентов  $A_i$  и  $C_{ij}$ :

$$y(t_i) = \tilde{y}(t_i),$$

где  $i = 1 \dots k$ .

Наилучшее решение такой системы находится с помощью метода наименьших квадратов ([1]). Суть данного метода заключается в нахождении таких коэффициентов, что сумма квадратов всех отклонений минимальна:

$$\sum_{i=1}^k (y(t_i) - \tilde{y}(t_i))^2 \rightarrow \min$$

1.2. *Модельная задача.* Данный способ идентификации нелинейных динамических систем был протестирован на модельной задаче.

$$x(t) = \sin(20t)$$

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{81002} & \left( 199 \cos^2(20t) - 15 \sin(40t) - 200 \cos(20t)e^{-2t} + 1 + \right. \\ & \left. + 10 \sin(20t)e^{-2t} + 20 \sin(20t)e^{-t} \right) + \frac{1}{409} \left( 3 \sin(20t) - 20 \cos(20t) + \frac{850920}{40501}e^{-3t} \right). \end{aligned}$$

Все расчеты были произведены в пакете прикладных программ для решения задач технических вычислений MATLAB версии R2022b. Также все интегралы в модели (7) были взяты аналитически. Они не внесли дополнительные ошибки в вычисления. Система линейных уравнений решалась с помощью функции `lsqminnorm` ([3]).

Для оценки качества аппроксимации используется следующая мера ошибки:

$$\varepsilon_N = \max_{t \in [0,1]} |y(t) - \tilde{y}(t)|$$

Для удобства тестирования предполагается, что все 3 переменные  $m, m_1, m_2$  равны между собой.

ТАБЛИЦА 1. Зависимость ошибки  $\varepsilon_N$  от параметров  $m$  и  $k$

m	3	5	7
$k = m + m^2$	$9.32 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-9}$	$3.43 \cdot 10^{-16}$
$k = (m + m^2) * 2$	$8.07 \cdot 10^{-4}$	$4.92 \cdot 10^{-10}$	$2.50 \cdot 10^{-16}$
$k = (m + m^2) * 5$	$8.07 \cdot 10^{-4}$	$3.90 \cdot 10^{-10}$	$1.04 \cdot 10^{-16}$
$k = (m + m^2) * 10$	$8.07 \cdot 10^{-4}$	$4.90 \cdot 10^{-10}$	$2.87 \cdot 10^{-15}$

При увеличении количества слагаемых значительно увеличивается точность аппроксимации нелинейной динамической системы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М : Физматгиз, 1962. 352 с.
2. *Guan, L., Zhu A.* Optimized Low-Complexity Implementation of Least Squares Based Model Extraction for Digital Predistortion of RF Power Amplifiers // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2012. 60, № 3. P. 594–603.
3. lsqminnorm: Minimum norm least-squares solution to linear equation. Дата обращения: 22.07.2023, <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/lsqminnorm.html>.
4. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integrals and Integro-Differential Equations. Madrid 1927 (Spanish), translated version reprinted. New York : Dover Publications, 1959.

Муратов Владислав Андреевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [muratov428@gmail.com](mailto:muratov428@gmail.com)

Сидоров Денис Николаевич  
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН), Иркутский  
государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [contact.dns@gmail.com](mailto:contact.dns@gmail.com)

Тында Александр Николаевич  
Пензенский государственный университет (ПГУ)  
E-mail: [tyndaan@mail.ru](mailto:tyndaan@mail.ru)



## ИССЛЕДОВАНИЕ МОРФОЛОГИИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА И ВОПРОСА НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХОФФА

© 2023 г. Н. Г. НИКОЛАЕВА, О. В. ГАВРИЛОВА, Н. А. МАНАКОВА

**Аннотация.** Изучена морфология фазового пространства уравнения Хоффа и показано, что в зависимости от значений параметров оно может содержать особенности ( $k$ -сборку Уитни). Проведено исследование единственности или неединственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Хоффа в прямоугольнике на основе метода фазового пространства, который был разработан Г. А. Свиридьюком. Найдены условия неединственности решения в случаях, когда размерность ядра оператора при производной по времени равна 1 или 2.

**Ключевые слова:** уравнения соболевского типа; задача Шоуолтера – Сидорова; уравнение Хоффа; неединственность решений; метод фазового пространства.

**AMS Subject Classification:** 35Q99

### 1. Введение.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим модель Хоффа, основанную на уравнение соболевского типа

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3, \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \quad (1)$$

с условием Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (2)$$

Модель Хоффа описывает динамику деформации двутавровой балки. Незвестная функция  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ , имеет физический смысл отклонения балки от положения равновесия. Параметр  $\lambda \in \mathbb{R}$  характеризует продольную нагрузку на балку, а параметры  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  характеризуют свойства материала балки. Модель деформации двутавровой балки (1), (2) изучалась в различных аспектах. Например, в [1] для линейной модели Хоффа изучалась многоточечная начально-конечная задача, работа [3] посвящена изучению оптимального управления процессом деформации балки, а в [2] исследовалась устойчивость линейных уравнений Хоффа на графе. В вырожденном случае уравнение Хоффа относится к уравнениям соболевского типа. Одним из первых начально-краевую задачу для уравнения (1) начал изучать Н.А. Сидоров [7]. В этой работе была отмечена принципиальная неразрешимость задачи Коши при произвольном начальном значении в силу вырожденности уравнения (1). Рассмотрение задачи Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

позволяет избежать трудностей изучения задачи Коши, однако возможна неединственность решения задачи. Изучение морфологии множества допустимых начальных значений  $\mathfrak{B}$ , понимаемого как фазовое пространство задачи, было начато в [4]. Если фазовое пространство модели (1), (2) имеет особенности, то возникает неединственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова, а из простоты фазового пространства модели (1), (2) следует единственность решения. Г.А. Свиридьюком и его учениками было показано, что фазовое пространство уравнения (1) является простым банаховым  $C^\infty$ -многообразием в случае  $\alpha\beta > 0$  [5], в случае  $\alpha\beta < 0$  фазовое пространство уравнения (1) уже не будет простым многообразием, оно может содержать 2-сборку Уитни [6]. В [8]

были найдены условия на параметры  $\alpha, \beta$ , при которых фазовое пространство уравнения (1) имеет особенности в случае  $\dim \ker(\lambda + \Delta) = 1$ .

Целью данного исследования является изучение модели (1), (2) в прямоугольнике и выявление условий накладываемых на параметры  $\alpha, \beta$ , при которых фазовое пространство имеет особенности и существует несколько решений задачи Шоуолтера – Сидорова при  $\dim \ker(\lambda + \Delta) = 1$  и  $\dim \ker(\lambda + \Delta) = 2$ .

**2. Особенности фазового пространства.** Для простоты изучения в качестве  $\Omega$  рассмотрим  $\Pi = (0, l_1) \times (0, l_2)$ , тогда задача Шоуолтера – Сидорова примет вид

$$\lambda(u(x, y, 0) - u_0(x, y)) + (u_{xx}(x, y, 0) + u_{yy}(x, y, 0) - u_0(x, y)) = 0, \quad (4)$$

для уравнения Хоффа

$$\lambda u_t + u_{xxt} + u_{yyt} = \alpha u + \beta u^3, \quad t \in (0, T), x \in (0, l_1), y \in (0, l_2), \quad (5)$$

с условием Дирихле

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = 0, u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа  $(-\Delta)$ :

$$-u_{xx} - u_{yy} = \lambda u, \quad (7)$$

$$u(0, y) = u(l_1, y) = 0, u(x, 0) = u(x, l_2) = 0. \quad (8)$$

Собственные значения  $\{\lambda_{k_1, k_2}\}$  задачи (7), (8) являются однократными или двукратными. В случае

- (а) если  $\lambda = \lambda_{k_1, k_2}$  и  $k_1 = k_2$ , то  $\dim \ker(\lambda + \Delta) = 1$  и рассматриваемому собственному значению  $\lambda_{k_1, k_2}$  соответствует одна собственная функция  $\varphi_{k_1, k_2}(x, y)$ , тогда функцию  $u(x, y, 0)$  будем представлять в виде  $u(x, y, 0) = s_1 \varphi_{k_1, k_2} + u^\perp$ ,  $u^\perp \in \mathfrak{U}^\perp = \{u \in L_4(\Omega) : \langle u, \varphi_{k_1, k_2} \rangle = 0\}$ ;
- (б) если  $\lambda = \lambda_{k_1, k_2}$  и  $k_1 \neq k_2$ , то  $\dim \ker(\lambda + \Delta) = 2$  и рассматриваемому собственному значению  $\lambda_{k_1, k_2}$  соответствует две собственные функции  $\varphi_{k_1, k_2}(x, y)$  и  $\varphi_{k_2, k_1}(x, y)$ , тогда функцию  $u(x, y, 0)$  будем представлять в виде  $u(x, y, 0) = s_1 \varphi_{k_1, k_2} + s_2 \varphi_{k_2, k_1} + u^\perp$ ,  $u^\perp \in \mathfrak{U}^\perp = \{u \in L_4(\Omega) : \langle u, \varphi_{k_1, k_2} \rangle = 0, \langle u, \varphi_{k_2, k_1} \rangle = 0\}$ .

Для случая (а) построим множество  $\mathfrak{B}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 = \{ & (s_1, u^\perp) \in \mathbb{R} \times L_4(\Omega) : s_1^3 \|\varphi_{k_1, k_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^3 u^\perp dx dy + \\ & + s_1 \left( 3 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + \alpha \beta^{-1} + \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} (u^\perp)^3 dx dy \right) = 0 \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для случая (б) построим множество  $\mathfrak{B}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2 = \{ & (s_1, u^\perp), (s_2, u^\perp) \in \mathbb{R} \times L_4(\Omega) : \alpha s_1 + \beta \|\varphi_{k_1, k_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3\beta s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^3 u^\perp dx dy + \\ & + 3s_1 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + \beta \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} (u^\perp)^3 dx dy + \\ & + \beta s_2 \left( 3 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} \varphi_{k_2, k_1} (u^\perp)^2 dx dy + 6s_1 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 \varphi_{k_2, k_1} u^\perp dx dy + \right. \\ & + 3s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^3 \varphi_{k_2, k_1} dx dy + 3s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_2, k_1}^2 \varphi_{k_1, k_2} u^\perp dx dy + \\ & \left. + 3s_1 s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_2, k_1}^2 \varphi_{k_1, k_2}^2 dx dy + s_2^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_2, k_1}^3 \varphi_{k_1, k_2} dx dy \right) = 0 \}, \end{aligned} \quad (10)$$

где множества  $\mathfrak{B}_1$  и  $\mathfrak{B}_2$  определяют фазовые пространства задачи (5), (6) при  $k_1 = k_2$  и  $k_1 \neq k_2$ , соответственно.

**Теорема 1.** (i) Пусть  $\alpha \beta > 0$ , тогда фазовым пространством уравнения (5) служит простое банаховое  $C^\infty$ -многообразие, моделируемое подпространством, дополнительным к  $\ker(\lambda + \Delta)$  [5].

(ii) Пусть  $\alpha \beta < 0$  и  $k_1 = k_2$ , тогда множество  $\mathfrak{B}_1$  образует 2-сборку Уитни [6].

(iii) Пусть  $\alpha \beta < 0$  и  $k_1 \neq k_2$ , тогда множество  $\mathfrak{B}_2$  образует  $k$ -сборку Уитни.

Уравнение, определяющее множество  $\mathfrak{B}_1$ , является кубическим уравнением общего вида

$$as_1^3 + bs_1^2 + cs_1 + d = 0. \quad (11)$$

Определим

$$Q_1(u) = \left( \frac{3ac - b^2}{9a^2} \right)^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right)^2, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \|\varphi_{k_1, k_2}\|_{L_4(\Omega)}^4, \quad b = 3 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^3 u^\perp dx dy, \\ c &= 3 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + \alpha\beta^{-1}, \quad d = \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} (u^\perp)^3 dx dy, \end{aligned} \quad (13)$$

и рассмотрим следующие множества

$$(\mathfrak{U}_1)_+^\perp = \{u \in \mathfrak{U}^\perp : Q_1(u) > 0\}, \quad (\mathfrak{U}_1)_-^\perp = \{u \in \mathfrak{U}^\perp : Q_1(u) < 0\}. \quad (14)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha\beta < 0$  и  $\lambda = \lambda_{k_1, k_2}, k_1 = k_2$ . Тогда

- (i) для любого  $u_0 \in (\mathfrak{U}_1)_+^\perp \cap (\mathfrak{U}_1)_-^\perp$  существует три решения задачи (4) – (6);
- (ii) для любого  $u_0 \in (\mathfrak{U}_1)_+^\perp \cap (\mathfrak{U}_1)_-^\perp$  существует единственное решение задачи (4) – (6).

Для простоты изучения множество  $\mathfrak{B}_2$  можно представить в виде  $\mathfrak{B}_2^1$  и  $\mathfrak{B}_2^2$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2^1 &= \{(s_1, u^\perp), (s_2, u^\perp) \in \mathbb{R} \times L_4(\Omega) : \alpha s_1 + \beta s_1^3 \|\varphi_{k_1, k_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3\beta s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^3 u^\perp dx dy + \\ &\quad + 3\beta s_1 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + \beta \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} (u^\perp)^3 dx dy + \\ &\quad + 3s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^3 \varphi_{k_2, k_1} dx dy + s_2^2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_2, k_1}^3 \varphi_{k_1, k_2} dx dy, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2^2 &= \{(s_1, u^\perp), (s_2, u^\perp) \in \mathbb{R} \times L_4(\Omega) : 3 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} \varphi_{k_2, k_1} (u^\perp)^2 dx dy + \\ &\quad + 6s_1 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 \varphi_{k_2, k_1} u^\perp dx dy + 3s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_2, k_1}^2 \varphi_{k_1, k_2} u^\perp dx dy + \\ &\quad + 3s_1 s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{k_2, k_1}^2 \varphi_{k_1, k_2}^2 dx dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим для каждого множества  $\mathfrak{B}_2^1$  и  $\mathfrak{B}_2^2$

$$Q_2^1(u) = Q_2^2(u) = \left( \frac{3ac - b^2}{9a^2} \right)^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right)^2, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \|\varphi_{k_1, k_2}\|_{L_4(\Omega)}^4, \quad b = 3 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} \varphi_{k_2, k_1} (u^\perp)^2 dx dy, \\ c &= 6 \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2}^2 \varphi_{k_2, k_1} u^\perp dx dy + \iint_{\Omega} 3\varphi_{k_2, k_1}^2 \varphi_{k_1, k_2} u^\perp + \alpha, \quad d = \iint_{\Omega} \varphi_{k_1, k_2} (u^\perp)^3 dx dy, \end{aligned} \quad (18)$$

введем следующие множества

$$\begin{aligned} (\mathfrak{U}_2)_+^\perp &= \{u \in \mathfrak{U}^\perp : Q_2^1(u) > 0, Q_2^2(u) > 0\}, \\ (\mathfrak{U}_2)_-^\perp &= \{u \in \mathfrak{U}^\perp : Q_2^1(u) < 0, Q_2^2(u) < 0\}. \end{aligned} \quad (19)$$

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha\beta < 0$  и  $\lambda = \lambda_{k_1, k_2}, k_1 \neq k_2$ . Тогда

- (i) для любого  $u_0 \in (\mathfrak{U}_2)_+^\perp \cap (\mathfrak{U}_2)_-^\perp$  существует девять решений задачи (4) – (6);
- (ii) для любого  $u_0 \in (\mathfrak{U}_2)_+^\perp \cap (\mathfrak{U}_2)_-^\perp$  существует единственное решение задачи (4) – (6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загребина С. А.* Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. 11, № 5. С. 4–12.
2. *Загребина С. А., Пивоварова П. О.* Устойчивость линейных уравнений Хоффа на графе // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 20105. № 5. С. 11–16.
3. *Манакова Н. А.* Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. 8, № 3. С. 5–24.
4. *Свиридюк Г. А., Сукачев Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференциальные уравнения. 1990. 26, № 2. С. 250–258.
5. *Свиридюк Г. А., Казак В. О.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Математические заметки. 2002. 71, № 2. С. 292–297.
6. *Свиридюк Г. А., Тринеева И. К.* Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа // Известия Вузов. Математика. 2005. № 10. С. 54–60.
7. *Сидоров Н. А., Романова О. А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференциальные уравнения. 1983. 19, № 9. С. 1516–1526.
8. *Nikolaeva N. G., Gavrilova O. V., Manakova N. A.* Numerical investigation of the non-uniqueness of the solution of the Showalter–Sidorov problem for a mathematical model of deformation of an I-beam // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2023. 10, № 2. С. 26–41.

Николаева Надежда Геннадьевна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ(НИУ))

E-mail: nikolaevang@susu.ru

Гаврилова Ольга Витальевна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ(НИУ))

E-mail: gavrilovaov@susu.ru

Манакова Наталья Александровна

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ(НИУ))

E-mail: manakovana@susu.ru





## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2023 г. П. С. ПЕТРЕНКО

**Аннотация.** Исследуется некоторый класс дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с гистерезисом. Рассматриваются нестационарные ДАУ с нелинейностью в виде гистерезиса (моделируемого с помощью процесса выметания). Для таких ДАУ построена эквивалентная (в смысле совпадения множеств решений) структурная форма и доказано необходимое и достаточное условие разрешимости начальной задачи.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраические уравнения, гистерезис, процесс выметания.

**AMS Subject Classification:** 34A09, 34C55, 93B05

**1. Введение.** Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с процессом выметания [5, 6] гистерезисного типа (моделируемого play-оператором [3, 4, 7]):

$$A(t)\dot{x}(t) = B(t)x(t) + C(t)y(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -\dot{z}(t) &\in \mathcal{N}_{Q(t)}(z(t)), \quad \dot{y}(t) = z(t), \\ y(t_0) &= y_0, \quad z(t_0) = z_0 \in Q(t_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  – заданные матрицы, причем  $\det A(t) \equiv 0$ ,  $T = [t_0, t_1]$  – заданный интервал,  $x(t), y(t), z(t) \in \mathbb{R}^n$  – неизвестные функции;  $Q(t) = x(t) - Z$  – “движущее множество”, где  $Z$  – заданное замкнутое выпуклое подмножество из  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathcal{N}_Q(q)$  – нормальный конус к замкнутому выпуклому множеству  $Q$  в точке  $q$ .

Под решением системы (1), (2) будем понимать тройку абсолютно непрерывных ( $W^{1,1}$ ) функций  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих (1), (2) почти всюду для  $t \in T$  (с мерой Лебега).

Дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) являются общепризнанной и широко изученной областью современной прикладной математики, возникая как естественное обобщение концепции ОДУ. Системы ДАУ моделируют процессы во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике, теплотехнике и др. В частности, ДАУ с гистерезисными явлениями возникают при моделировании электрических схем (см. [2]).

Данная работа является продолжением исследований, проделанных в [7].

**2. Эквивалентные преобразования.** Рассмотрим систему ОДУ, не разрешенную относительно производной

$$A(t)\dot{x}(t) = B(t)x(t) + U(t)f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (3)$$

где  $A(t), B(t), U(t) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  – заданные матрицы, причем  $\det A(t) \equiv 0$ ,  $f(t) \in \mathbb{R}^n$  – некоторая непрерывная на  $I$  функция;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – неизвестная функция, описывающая состояние системы. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями.

Положим, что матрицы  $A(t)$  и  $B(t)$  достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на  $I$  функции. Определим матрицы  $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$B_r(t) = (C_0^0 B(t), C_1^0 B'(t), \dots, C_r^0 B^{(r)}(t)),$$

$$\mathcal{A}_r(t) = (C_0^0 A(t), C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t), \dots, C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t)),$$

$(n(r+1) \times nr)$ -матрицу

$$\Lambda_r(t) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix}$$

и  $(n(r+1) \times n(r+2))$ -матрицу

$$\mathcal{D}_r(t) = (\mathcal{B}_r(t) \mid \mathcal{A}_r(t) \parallel \Lambda_r(t)).$$

Здесь  $C_i^j$  – биномиальные коэффициенты,  $O$  – нулевая матрица соответствующего размера. Предположим, что для некоторого  $r$  ( $0 \leq r \leq n$ ) выполняются следующие условия:

- 1)  $\text{rank } \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const } \forall t \in I$ ,
- 2) в матрице  $\mathcal{D}_r(t)$  существует неособенный  $\forall t \in I$  минор порядка  $n(r+1)$ , который состоит из  $\lambda$  столбцов матрицы  $\Lambda_r(t)$  и  $n$  первых столбцов матрицы  $\mathcal{A}_r(t)$ .

Такой минор будем называть разрешающим.

**Определение 1.** *Наименьшее значение  $r$ , при котором в матрице  $\mathcal{D}_r(t)$  найдется разрешающий минор, называется индексом неразрешенности ДАУ (3).*

Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы  $\mathcal{D}_r(t)$  входят в разрешающий минор. Вычеркнем  $n-d$  столбцов матрицы  $\mathcal{B}_r(t)$ , которые не входят в упомянутый минор, где  $d = nr - \lambda$ . После соответствующей перестановки столбцов из  $\mathcal{D}_r(t)$  получим матрицу

$$\Theta_r(t) = \mathcal{D}_r(t) \text{diag} \left( S \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}, S, \dots, S \right),$$

где  $E_d$  – единичная матрица порядка  $d$ ,  $S$  –  $(n \times n)$ -матрица перестановок.

Способ построения матрицы перестановок  $S$  приведен в [1].

**Лемма 1.** *Пусть  $A(t), B(t), U(t), f(t) \in \mathbb{C}^{r+1}(I)$ ,  $\text{rank } \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const } \forall t \in I$ , в матрице  $\mathcal{D}_r(t)$  имеется разрешающий минор, а также  $\text{rank } \mathcal{D}_r(t) = \text{rank } \mathcal{D}_{r-1}(t) + n \forall t \in I$ .*

*Тогда на  $I$  существует оператор вида*

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t) \frac{d}{dt} + \dots + R_r(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^r, \quad (4)$$

*который преобразует ДАУ (3) к эквивалентной структурной форме*

$$\dot{x}_1(t) = J_1(t)x_1(t) + \mathcal{H}(t)\bar{f}(t), \quad (5)$$

$$x_2(t) = J_2(t)x_1(t) + \mathcal{G}(t)\bar{f}(t), \quad (6)$$

где  $\text{column}(x_1(t), x_2(t)) = S^{-1}x(t)$ ,  $\bar{f}(t) = \text{column}(f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(r)}(t))$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}(t) \\ \mathcal{H}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \\ H_0(t) & H_1(t) & \dots & H_r(t) \end{pmatrix} = (R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) \mathcal{P}_r[U(t)], \quad (7)$$

$$\mathcal{P}_r[U(t)] = \begin{pmatrix} C_0^0 U(t) & O & \dots & O \\ C_1^0 U'(t) & C_1^1 U(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0 U^{(r)}(t) & C_r^1 U^{(r-1)}(t) & \dots & C_r^r U(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} = (R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) \mathcal{B}_r(t) S^{-1}. \quad (9)$$

При этом оператор (4) обладает левым обратным, его коэффициенты  $R_j(t)$  ( $j = \overline{0, r}$ ) являются непрерывными и находятся единственным образом по формуле

$$(R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) = (E_n \ O \ \dots \ O) \Theta_r^\top(t) \left( \Theta_r(t) \Theta_r^\top(t) \right)^{-1},$$

а все решения ДАУ (3) являются решениями системы (5), (6) и наоборот.

**Определение 2.** Решением системы (3) называется  $n$ -мерная вектор-функция  $x(t) \in \mathbb{C}^1(I)$ , обращающая уравнение (3) в тождество на  $I$  при подстановке.

**Определение 3.** Систему (5), (6) будем называть эквивалентной формой для ДАУ (3).

Лемма 1 позволяет получить критерий существования и единственности решения начальной задачи для уравнения (3). Для этого определим начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad (10)$$

где  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  – заданный вектор.

**Следствие 1.** Пусть выполнены все предположения леммы 1. Для того чтобы задача (3), (10) имела решение на  $I$ , необходимо и достаточно выполнения равенства

$$x_{2,0} = J_2(t_0)x_{1,0} + \mathcal{G}(t_0)\bar{f}(t_0), \quad (11)$$

где  $\text{column}(x_{1,0}, x_{2,0}) = S^{-1}x_0$ . При этом, если решение задачи (3), (10) существует, то оно единственно.

**Определение 4.** Начальные данные (10), удовлетворяющие условию (11), будем называть согласованными с системой (3).

Доказательства леммы 1 и следствия 1 приведены в [1].

### 3. Основные результаты.

**Теорема 1.** Пусть:

- 1)  $A(t), B(t), C(t), y(t) \in \mathbb{C}^{r+1}(T)$ ;
- 2)  $\text{rank} \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \ \forall t \in T$ ;
- 3) существует разрешающий минор в матрице  $\mathcal{D}_r(t)$ ;
- 4)  $\text{rank} \mathcal{D}_r(t) = \text{rank} \mathcal{D}_{r-1}(t) + n \ \forall t \in T$ .

Тогда на  $T$  существует оператора вида (4), который преобразует систему (1), (2) к эквивалентной (в смысле совпадения множеств решений) структурной форме

$$\dot{x}_1(t) = J_1(t)x_1(t) + \mathcal{H}(t)\bar{y}(t), \quad (12)$$

$$x_2(t) = J_2(t)x_1(t) + \mathcal{G}(t)\bar{y}(t), \quad (x_1(t_0), x_2(t_0)) = S^{-1}x_0, \quad (13)$$

$$-\dot{z}(t) \in \mathcal{N}_{Q(t)}(z(t)), \quad \dot{y}(t) = z(t), \quad (14)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0 \in Q(t_0).$$

где  $\text{column}(x_1(t), x_2(t)) = S^{-1}x(t)$ ,  $\bar{y}(t) = \text{column}(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(r)}(t))$ ,  $S$  – матрица перестановок;  $\mathcal{G}(t), \mathcal{H}(t), J_1(t), J_2(t)$  определяются из формул (7)–(9).

Рассмотрим систему (1), (2) с индексом  $r = 1$ . Тогда теорема 1 позволяет получить следующий критерий существования и единственности решения начальной задачи для системы (1), (2).

**Следствие 2.** Пусть  $A(t), B(t), C(t), y(t) \in \mathbb{C}^2(T)$ ,  $\text{rank} \Lambda_1(t) = \lambda = \text{const} \ \forall t \in T$ , в матрице  $\mathcal{D}_1(t)$  существует разрешающий минор и  $\text{rank} \mathcal{D}_1(t) = \text{rank} \mathcal{D}_0(t) + n \ \forall t \in T$ .

Тогда задача (1), (2) разрешима на  $T$  тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$x_{2,0} = J_2(t_0)x_{1,0} + G_0(t_0)y_0 + G_1(t_0)z_0. \quad (15)$$

Здесь  $\text{column}(x_{1,0}, x_{2,0}) = S^{-1}x_0$ . Кроме того, если решение задачи (1), (2) существует, то оно единственно.

По аналогии начальные условия  $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ , удовлетворяющие (15), будем называть согласованными с системой (1), (2), а систему (12)–(14) – эквивалентной формой для (1), (2).

Доказательства теорема 1 и следствия 2 опущены.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щеглова А. А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. 10. С. 57–80.
2. Adly S., Haddad T., Thibault L. Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities // Mathematical Programming B.. 148, № 1. P. 5–47.
3. Brokate M., Sprekels J. Hysteresis and Phase Transitions // in: Ser. Appl. Math. Sci.. New-York : Springer-Verlag, 1996. 121. 358 pp.
4. Krejčí P. Vector hysteresis models // European J. Appl. Math. 1996. 2. P. 281–292.
5. Kunze M., Marques M. D. M. An Introduction to Moreau<sup>TM</sup>s Sweeping Process. // In Brogliato B. (eds) Impacts in Mechanical Systems. Lecture Notes in Physics. 2000. 551. P. 1–60.
6. Moreau J.-J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. // J. Differential Eq. 1977. 26. P. 347–374.
7. Petrenko P., Samsonyuk O., Staritsyn M. A note on Differential-Algebraic Systems with Impulsive and Hysteresis Phenomena // Cybernetics and Physics. 2020. 9, № 1. P. 51–56.

Петренко Павел Сергеевич

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: petrenko\_p@mail.ru



## ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНОГО СИГНАЛА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. С. В. СОЛОДУША, Ю. И. КОКОНОВА

**Аннотация.** Рассматривается полиномиальное уравнение Вольтерра I рода, возникающее в задаче идентификации входного сигнала, которому соответствует заданный отклик динамической системы типа вход – выход. Предложен способ построения численного решения с помощью итерационного процесса Ньютона – Канторовича. В качестве пробного решения используется численное решение соответствующего линейного уравнения Вольтерра.

**Ключевые слова:** нелинейная динамическая система, полиномиальные уравнения Вольтерра I рода, идентификация входных сигналов, метод Ньютона–Канторовича.

**AMS Subject Classification:** 45D05

**1. Введение.** Среди широкого класса обратных задач, в которых по следствию требуется найти причину наблюдаемого явления, можно выделить задачи непараметрической идентификации. Из-за инерционности динамической системы, включающей исследуемый объект и измерительное устройство, ее переходные характеристики не являются  $\delta$ -функциями. Поэтому возникает обратная задача восстановления входного сигнала по зарегистрированным значениям выходного сигнала. Такая задача часто рассматривается при описании нелинейного объекта моделью типа "вход-выход" в виде интегрального полинома Вольтерра [7]

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(s_i) ds_i, \quad (1)$$

$t \in [0, T]$ , и может быть сведена к решению интегральных уравнений Вольтерра I рода, которые, вообще говоря, относятся к классу некорректно поставленных задач (решение таких задач может не существовать, не быть единственным или может отсутствовать непрерывная зависимость решения от исходных данных). Для решения некорректно поставленных задач используются методы регуляризации [4].

Рассмотренные в работе интегральные уравнения Вольтерра I рода в случае, когда погрешность входной информации выводит решение за пределы множества корректности, допускают применение методов саморегуляризации (где шаг сетки является естественным параметром регуляризации). Очевидно, что разработка новых методов моделирования на основе устойчивых алгоритмов, с учетом идей саморегуляризации, является важной и актуальной прикладной задачей.

**2. Постановка задачи и основные результаты.** Цель данной работы: в предположении, что ядра Вольтерра  $K_m$  из (1) при фиксированном  $N > 1$  известны, рассмотреть задачу идентификации входного сигнала  $x(t)$ , который соответствует известному отклику  $y(t)$ . Такая постановка возникает в задаче автоматического управления техническими объектами. Уравнение (1), при известных  $y(t)$  и  $K_m$ , есть  $N$ -степенное (полиномиальное) уравнение Вольтерра I рода относительно

---

Исследование выполнено в Институте динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00173), <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>.

$x(t)$ , которое, как показано в [1], в предположениях

$$K_1(t, t) \neq 0, t \in [0, T], (K_1(t, s))'_t \in C_\Delta, \Delta = \{t, s : 0 \leq s \leq t \leq T\}, y(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}, y(0) = 0,$$

функции  $K_m$  ( $m > 1$ ) непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по  $t$ , корректно на паре  $(C_{[0, \bar{t}]}, C_{[0, \bar{t}]}^{(1)})$  при малом значении  $\bar{t} < T$ . Специфика таких уравнений рассмотрена в серии работ А. С. Апарцина (см. обзор в [3]).

Алгоритмы численного решения частных случаев (1) при  $N = 2, 3$  методом Ньютона–Канторовича были предложены в статьях [5, 6]. В работе [5] предполагалось, что значения  $K_m$  являются константами, а в [6] реализована ситуация, когда

$$K_m(t, s_1, \dots, s_m) = \prod_{i=1}^m \varphi(t, s_i).$$

В данной работе обобщаются рассмотренные ранее случаи. Выберем для простоты  $N = 2$  и проведем линеаризацию (1) по схеме Ньютона–Канторовича. Введем нелинейный интегральный оператор

$$Px(t) \equiv \int_0^t K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 - y(t). \quad (2)$$

Найдем производную (по Фреше) (2) в точке  $x_0(t)$ , где  $x_0(t)$  – пробное решение, так что

$$P'[x_0](x(t)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{P(x_0(t) + \omega x(t)) - P(x_0(t))}{\omega} = \int_0^t K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \\ + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_1)x_0(s_2)ds_1ds_2 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x_0(s_2)ds_1ds_2.$$

В операторной форме уравнение (1),  $N = 2$ , имеет вид  $Px = 0$ . Применяя метод Ньютона–Канторовича

$$P'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = -P(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \\ x_n = x_{n-1} - [P'(x_{n-1})]^{-1} \cdot P(x_{n-1}),$$

найдем очередное приближение  $x_n(t)$  в итерационном процессе

$$\int_0^t K_1(t, s_1)x_n(s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_{n-1}(s_1)x_n(s_2)ds_1ds_2 + \\ + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_n(s_1)x_{n-1}(s_2)ds_1ds_2 = \Phi_{n-1}(t), \quad (3)$$

где

$$\Phi_{n-1}(t) = \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_{n-1}(s_1)x_{n-1}(s_2)ds_1ds_2 + y(t).$$

Аппроксимируя далее интегралы в (3) с помощью стандартных квадратурных методов, получим приближенное решение на  $n$ -й итерации Ньютона–Канторовича. Выбор процедур дискретизации интегральных операторов обусловлен свойством саморегуляризации [2]. Специфика предложенного алгоритма проиллюстрирована на тестовых примерах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А. С.* Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. 18, № 1. С. 69–81.
2. *Апарцин А. С., Бакушинский А. Б.* Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // в кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск : Иркут. гос. ун-т., 1972. С. 248–258.
3. *Солодуша С. В., Гражданцева Е. Ю.* Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. 27, № 4. С. 161–174.
4. *Тухонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1979.
5. *Solodusha S. V.* To the numerical solution of one class of systems of the Volterra polynomial equations of the first kind // Num. Anal. Appl. 2018. 11, № 1. P. 89–97.
6. *Solodusha S. V.* Identification of input signals in integral models of one class of nonlinear dynamic systems // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2019. 30. P. 73–82.
7. *Volterra V.* A Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. New York : Dover Publ., 1959.

Солодуша Светлана Витальевна

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН),

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Коконова Юлия Игоревна

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН),

Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИрНИТУ)

E-mail: dudareva.yuliya@mail.ru



APPLICATION OF THE CESTAC METHOD AND CADNA LIBRARY TO  
CONTROL THE ACCURACY OF FUZZY VOLTERRA INTEGRAL  
EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS KERNEL

© 2023 г. S. NOEIAGHDAM, D. N. SIDOROV

**АННОТАЦИЯ.** The accuracy of the S-CM in both SE and DE cases is discussed. Also, two numerical algorithms based on the S-CM in SE and DE decays by applying the fuzzy CESTAC method and CADNA library are presented. The termination criterion in each algorithm is based on the Hausdorff distance to be an informatical zero. By solving some examples, not only the optimal approximation and the optimal iteration of the S-CM can be found but also similar to the non-fuzzy case, it is shown that the DE precision is more accurate with faster convergence rate than the SE.

**Ключевые слова:** Volterra Integral Equation, Sinc-collocation method, CESTAC method, CADNA library.

**AMS Subject Classification:** 45A05, 45D05, 46N20

**1. Introduction.** There are many phenomena in the world that can be modelled in the form of mathematical problems such as bio-mathematical models, energy supply-demand model and others. They can help us to analyze and predict the phenomena using the mathematical methods, deep learning and big data. Such Volterra models that contain past information are called *hereditary* systems. Recently, many authors modeled the load leveling problem arising in the energy storages of the powering systems in the form of the linear and non-linear Volterra integral equation (VIE) with discontinuous kernel. They have been focused on solving this problem by numerical and semi-analytical methods [1].

**2. Main Idea.** The main purpose of this work is to validate the numerical solution of fuzzy Volterra integral equation (IE) with discontinuous kernel by applying the Sinc-collocation method (S-CM) based on the double exponential (DE) and single exponential (SE) decay.

Let  $\tilde{v}(z) = (v^{(1)}(z), v^{(2)}(z), v^{(3)}(z))$  and  $\tilde{x}(z) = (x^{(1)}(z), x^{(2)}(z), x^{(3)}(z))$  are triangular fuzzy functions on  $[a, b]$ . The second kind fuzzy Volterra IE with discontinuous kernel is presented as

$$\tilde{v}(z) = \tilde{x}(z) \oplus \sum_{j=1}^{m'} \int_{\beta_{j-1}(z)}^{\beta_j(z)} H_j(z, y) \tilde{v}(y) dy, \quad a \leq z, y \leq b, \quad (1)$$

where

$$0 =: \beta_0(z) < \beta_1(z) < \dots < \beta_{m'-1}(z) < \beta_{m'}(z) := z, \quad \text{for } z \in (0, T),$$

and  $\beta_j(0) = 0$ . Also,  $\forall z \in J = [0, T]$  we assume that  $\tilde{x}(z)$  is bounded and  $H_j(z, y)$  is discontinuous along continuous curves  $\beta_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m'$ . Eq. (1) can be written as

$$v^{(p)}(z) = x^{(p)}(z) + \sum_{j=1}^{m'} \int_{\beta_{j-1}(z)}^{\beta_j(z)} H_j(z, y) v^{(p)}(y) dy, \quad a \leq z, y \leq b, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2)$$



This study is based on discrete stochastic arithmetic (DSA) which is able to validate the results with optimal solution and rely the proposed algorithm in comparison with the floating-point arithmetic (FPA). In order to achieve this goal, the fuzzy CESTAC<sup>1</sup> method and the CADNA<sup>2</sup> library are applied.

**Definition:** The number of common significant digits between two real numbers  $\theta$  and  $\eta$  is shown by  $C_{\theta,\eta}$  and is estimated as

$$C_{\theta,\eta} = \log_{10} \left| \frac{\theta + \eta}{2(\theta - \eta)} \right| = \log_{10} \left| \frac{\theta}{\theta - \eta} - \frac{1}{2} \right|, \quad \theta \neq \eta, \quad (3)$$

$$C_{\theta,\theta} = +\infty.$$

**Theorem 1.** Let

$$\tilde{v}(z) = (v^{(1)}(z), v^{(2)}(z), v^{(3)}(z)),$$

be the exact solution and

$$\tilde{v}_J^{DE}(z) = (v_J^{(1),DE}(z), v_J^{(2),DE}(z), v_J^{(3),DE}(z)),$$

be the  $J$ -th order numerical solution of Eq. (2) which is produced by DE in the S-CM. Then, for arbitrary  $z \in [a, b]$ , we get

$$C_{v^{(p)}(z), v_J^{(p),DE}(z)} - C_{v_{J+1}^{(p),DE}(z), v_J^{(p),DE}(z)} = \log_{10} \left| 1 + \mathcal{O} \left( \exp \left( \frac{-\pi d}{\log_{10} \left( \frac{2d(J+1)}{\alpha} \right)} \right) \right) \right|. \quad (4)$$

**Theorem 2.** Let  $\tilde{v}(z) = (v^{(1)}(z), v^{(2)}(z), v^{(3)}(z))$  be the exact solution and

$$\tilde{v}_J^{SE}(z) = (v_J^{(1),SE}(z), v_J^{(2),SE}(z), v_J^{(3),SE}(z)),$$

be the  $J$ -th order numerical solution of Eq. (2) which is produced by SE in the S-CM. Then for arbitrary value of  $z \in [a, b]$ ,

$$C_{v^{(p)}(z), v_J^{(p),SE}(z)} - C_{v_{J+1}^{(p),SE}(z), v_J^{(p),SE}(z)} = \mathcal{O} \left( \log_{10}(J+1) \sqrt{J} \exp \left( -\sqrt{\pi d \alpha J} \right) \right). \quad (5)$$

**3. Numerical illustration.** Consider the fuzzy Volterra IE (2) with  $H_1(z, y) = \frac{z^2 + y^2 - 2}{13}$ ,  $0 \leq z, y \leq \frac{z}{3}$  and  $H_2(z, y) = z - y$ ,  $\frac{z}{3} \leq z, y \leq z$

$$\underline{x}(z; \rho) = z\rho + \frac{3}{26} - \frac{3}{26}\rho - \frac{1}{13}z^2 - \frac{1}{13}z^2\rho,$$

$$\bar{x}(z; \rho) = 2z - \rho z + \frac{3}{26}\rho + \frac{1}{13}z^2\rho - \frac{3}{26} - \frac{3}{13}z^2, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

In this example, the mentioned method is applied to find the approximate solution based on the DE precision. The numerical results for  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $d = \frac{\pi}{6}$  at point  $z = 0.5$  are shown in Table 1. In this table, the numerical results, difference between two successive approximations and the estimated Hausdorff distance are shown for different values of  $J, \rho$ . According to the obtained results, the optimal iteration of DE precision for both points  $z = 0.5, 0.9$  is  $J_{opt} = 13$ .

<sup>1</sup>Contrôle et Estimation Stochastique des Arrondis de Calculs

<sup>2</sup>Control of Accuracy and Debugging for Numerical Applications

ТАБЛИЦА 1. The numerical results of Example 1 by DE S-CM for  $z = 0.5, \alpha = \frac{1}{2}, d = \frac{\pi}{6}$ .

$J$	$\rho$	$\bar{v}_J^{DE}(z; \rho)$	$ \bar{v}_{J+1}^{DE}(z; \rho) - \bar{v}_J^{DE}(z; \rho) $	$\bar{v}_J^{DE}(z; \rho)$	$ \bar{v}_{J+1}^{DE}(z; \rho) - \bar{v}_J^{DE}(z; \rho) $	$Max$
1	0.0	0.8724542E-001	0.8724542E-001	0.7199699E+000	0.7199699E+000	0.7199699E+000
	0.1	0.1188816E+000	0.1188816E+000	0.6883337E+000	0.6883337E+000	0.6883337E+000
	0.2	0.1505178E+000	0.1505178E+000	0.6566975E+000	0.6566975E+000	0.6566975E+000
	0.3	0.1821541E+000	0.1821541E+000	0.6250613E+000	0.6250613E+000	0.6250613E+000
	0.4	0.2137903E+000	0.2137903E+000	0.5934250E+000	0.5934250E+000	0.5934250E+000
	0.5	0.2454265E+000	0.2454265E+000	0.5617888E+000	0.5617888E+000	0.5617888E+000
	0.6	0.2770628E+000	0.2770628E+000	0.5301526E+000	0.5301526E+000	0.5301526E+000
	0.7	0.3086990E+000	0.3086990E+000	0.4985163E+000	0.4985163E+000	0.4985163E+000
	0.8	0.3403352E+000	0.3403352E+000	0.4668801E+000	0.4668801E+000	0.4668801E+000
	0.9	0.3719715E+000	0.3719715E+000	0.4352438E+000	0.4352438E+000	0.4352438E+000
1.0	0.4036077E+000	0.4036078E+000	0.4036076E+000	0.4036076E+000	0.4036078E+000	
1	-	-	-	-	<b>Distance =</b>	<b>0.7199699E+000</b>
:	:	:	:	:	:	:
12	0.0	0.7946412E-001	0.4E-007	0.9205358E+000	0.5960464E-007	0.4E-007
	0.1	0.1215177E+000	0.5E-007	0.8784823E+000	@.0	0.5E-007
	0.2	0.1635713E+000	0.5960464E-007	0.8364288E+000	0.5960464E-007	0.5960464E-007
	0.3	0.2056248E+000	@.0	0.7943751E+000	@.0	@.0
	0.4	0.2476785E+000	@.0	0.7523215E+000	@.0	@.0
	0.5	0.2897320E+000	@.0	0.7102679E+000	0.5960464E-007	@.0
	0.6	0.3317856E+000	@.0	0.6682143E+000	@.0	@.0
	0.7	0.3738392E+000	@.0	0.6261607E+000	@.0	@.0
	0.8	0.4158929E+000	@.0	0.5841071E+000	0.5960464E-007	@.0
	0.9	0.4579465E+000	@.0	0.5420535E+000	@.0	@.0
1.0	0.5000001E+000	@.0	0.4999999E+000	@.0	@.0	
12	-	-	-	-	<b>Distance =</b>	<b>0.5E-007</b>
13	0.0	0.7946413E-001	@.0	0.9205358E+000	@.0	@.0
	0.1	0.1215177E+000	@.0	0.8784823E+000	@.0	@.0
	0.2	0.1635713E+000	0.0000000E+000	0.8364287E+000	@.0	0.0000000E+000
	0.3	0.2056248E+000	@.0	0.7943751E+000	@.0	@.0
	0.4	0.2476785E+000	@.0	0.7523215E+000	@.0	@.0
	0.5	0.2897320E+000	@.0	0.7102680E+000	@.0	@.0
	0.6	0.3317857E+000	@.0	0.6682143E+000	0.0000000E+000	@.0
	0.7	0.3738392E+000	@.0	0.6261607E+000	@.0	@.0
	0.8	0.4158929E+000	@.0	0.5841071E+000	0.0000000E+000	@.0
	0.9	0.4579465E+000	@.0	0.5420535E+000	@.0	@.0
1.0	0.5000001E+000	0.0000000E+000	0.4999999E+000	0.2980232E-007	0.2980232E-007	
13	-	-	-	-	<b>Distance =</b>	<b>@.0</b>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tynda A. N., Noeiaghdam S., Sidorov D. N. Polynomial Spline Collocation Method for Solving Weakly Regular Volterra Integral Equations of the First Kind // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics 2022. 39. С. 62–79.

Samad Noeiaghdam

<sup>1</sup>Industrial Irkutsk National Research Technical University

<sup>2</sup> South Ural State University

E-mail: snoei@istu.edu; noiagdams@susu.ru

Sidorov Denis Nikolaevich

<sup>1</sup> Irkutsk National Research Technical University

<sup>3</sup>Energy Systems Institute SB RAS

E-mail: sidorovdn@istu.edu



## ОБ ОДНОЙ НЕГЛАДКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

© 2023 г. А. А. АБДУЛЛАЕВ, К. Б. МАНСИМОВ

**Аннотация.** Рассматривается одна негладкая задача оптимального управления описываемая интегральным уравнением типа Вольтерра. Доказаны ряд необходимых условий оптимальности в терминах производных по направлениям.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, типа Вольтерра, производная по направлениям, допустимое управление, необходимое условие оптимальности, терминальный функционал.

**AMS Subject Classification:** 49K15, 49K20

К настоящему времени различные аспекты задач оптимального управления описываемые интегральными уравнениями при различных условиях гладкости на данные задачи ( правая часть уравнения, функционал качества ) достаточно полно исследованы. Относительно полный обзор соответствующих результатов имеется например в [1–3]. В предлагаемой работе рассматривается одна негладкая задача оптимального управления описываемая системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Доказаны ряд необходимых условий оптимальности. Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S(u) = \Phi(x(t_1)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, s, x(s), u(s)) ds, t \in T, \quad (3)$$

Здесь  $f(t, s, x, u) = (f_1(t, s, x, u) \dots f_n(t, s, x, u))$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных и имеющая производные по любому направлению,  $\Phi(x)$  – заданная липщцевая функция имеющая производные по любому направлению,  $u(t)$  –  $r$  мерная кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) управляющая функция,  $U$  – заданное непустое и ограниченное множество.

Каждую управляющую функцию с вышеприведёнными свойствами, назовем допустимым управлением, а допустимое управление доставляющее минимальное значение функционалу (1) при ограничениях (2)–(3) назовем оптимальным управлением.

Пусть  $\theta \in [t_0, t_1]$  произвольная точка непрерывности управления  $u(t)$ ,  $u \in U$  произвольный вектор, а  $c_1 > 0$  – произвольное достаточно малое число такое, что  $\theta < c_1 < t_1$ . Считая  $u(t)$  некоторым допустимым управлением, «возмущенную» управлению определим по формуле

$$u_\epsilon(t) = \begin{cases} u(t), t \in [t_0, t_1] \setminus [\theta, \theta + \epsilon] \\ v, t \in [\theta, \theta + \epsilon] \end{cases}$$

Пусть  $h(t) = (h_1(t) \dots h_n(t))$  определяется формулой

$$h(t) = \lim_{\epsilon} \frac{x_\epsilon(t) - x(t)}{\epsilon}. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial f[t, s]}{\partial x} = \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x},$$

$$\Delta_v f[t, s] = f(t, s, x(s), v) - f(t, s, x(s), u(s)).$$

Можно показать, что  $h(t)$  определяемая формулой (4) при сделанных предположениях является решением уравнения

$$h(t) = \int_{\theta}^t \frac{\partial f[t, s]}{\partial h(s)} + \Delta_v f[t, \theta] \quad (5)$$

а при  $t < \theta, h(t) = 0$ . Используя эту формулу доказывается.

**Теорема 1.** *При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления  $u(t)$ , необходимо, чтобы неравенство*

$$\frac{\partial \Phi((x(t_1)))}{\partial h(t_1)} \geq 0, \quad (6)$$

выполнялось для всех допустимых вариаций  $h(t_1)$  траектории  $x(t_1)$ .

Пусть теперь  $f(t, s, x(s), u)$  непрерывно дифференцируема по  $x$ . Тогда из (4) следует, что

$$h(t) = \int_{\theta}^t \frac{\partial f[t, s]}{\partial x} h(s) ds + \Delta_v f[t, \theta] \quad (7)$$

Предположим, что  $\Phi(x)$  квазидифференцируема в смысле Демьянова-Рубинова [4]. Тогда из неравенства (6) следует, что вдоль оптимального управления

$$\max_{\alpha \in \underline{\partial \Phi}((x(t_1)))} \alpha' h(t_1) + \min_{\alpha \in \bar{\partial \Phi}((x(t_1)))} \beta' h(t_1) \geq 0 \quad (8)$$

где  $\underline{\partial \Phi}((x(t_1))), \bar{\partial \Phi}((x(t_1)))$  квазидифференциал функции  $\Phi(x)$  в точке  $x(t_1)$ .

Решение  $h(t)$  уравнение (8) допускает представление

$$h(t) = \int_{\theta}^t R(t, s) \Delta_v f[s, \theta] + \Delta_v f[t, \theta] \quad (9)$$

Здесь матричная функция  $R(t, \tau]$  (резольвента) являются решением уравнения

$$R(t, \tau] = \int_{\tau}^t \frac{\partial f[s, \tau]}{\partial x} R(s, \tau) ds + \frac{\partial f[t, \tau]}{\partial x}$$

учитывая формулу (9) в неравенства (8) получаем, что

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha \in \underline{\partial \Phi}((x(t_1)))} \alpha' \left[ \int_{\theta}^{t_1} R(t_1, t) \Delta_v f[t, \theta] + \Delta_v f[t_1, \theta] \right] + \\ & + \min_{\alpha \in \bar{\partial \Phi}((x(t_1)))} \beta' \left[ \int_{\theta}^{t_1} R(t_1, t) \Delta_v f[t, \theta] + \Delta_v f[t_1, \theta] \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\psi_{\alpha}(\theta) = \alpha' \int_{\theta}^{t_1} R(t_1, t) dt, \psi_{\beta}(\theta) = \beta' \int_{\theta}^{t_1} R(t_1, t) dt$$

$$H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi_{\alpha}(\theta)) = \int_{\theta}^{t_1} \psi_{\alpha}(\theta) f(t_1, \theta, x(\theta), u(\theta)).$$

Приходим к утверждению

**Теорема 2.** *Если функция  $\Phi(x)$  квазидифференцируемая, а  $f(t, s, x, u)$  имеет непрерывную производную по  $x$ , то для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство*

$$\max_{\alpha \in \underline{\partial \Phi}((x(t_1)))} \Delta_v H[\theta, \psi_{\alpha}] + \min_{\alpha \in \bar{\partial \Phi}((x(t_1)))} \Delta_v H[\theta, \psi_{\beta}] \leq 0$$

выполнялось для всех  $v \in U$  и  $\theta \in [t_0, t_1]$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев А. А., Мансимов К. Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Элм, 2013. 146 с.
2. *Абуладзе А. А.* Задачи оптимального управления для систем, описываемых интегральными уравнениями. Тбилиси : Изд-во ТГУ, 1988. 127 с.
3. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 432 с.
4. *Vega Constansa De. La.* Necessary conditions for optimal terminal control problems governed by Volterra integral equations // Optimiz. Theory and Appl. 2006. 1. С. 79–93.

Абдуллаев Агшин Абиль оглы

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

E-mail: [agshin-abdullayev@mail.ru](mailto:agshin-abdullayev@mail.ru)

Мансимов Камил Байрамали оглы

Бакинский государственный университет, Азербайджан, Баку

Институт систем управления НАН Азербайджана

E-mail: [kamilbmansimov@gmail.com](mailto:kamilbmansimov@gmail.com)



## ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. С. Т. АЛИЕВА, К. Б. МАНСИМОВ

Аннотация. А. И. Москаленко рассмотрел задачи оптимального управления процессами, занимающие как бы промежуточное место между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами и доказал ряд необходимых и достаточных условий оптимальности. В статье изучается разностный аналог дробного порядка одной из этих задач. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

**Ключевые слова:** двухпараметрическая дискретная задача, оптимальное управление, дробного порядка, допустимое управление.

**AMS Subject Classification:** 39A50, 49K05

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала [?]

$$S(u, v) = \varphi_1(y(x_1)) + \sum_{x_0}^{x_1} \varphi_2(x, z(t_1, x)), \quad (1)$$

при следующих ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad (2)$$

$$v(x) \in U \subset R^q, x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}.$$

$$\Delta^\alpha z(t + 1, x + 1) = f(t, x, z(t, x), u(t)), \quad (3)$$

с начальными условиями

$$z(t_0, x) = y(x), x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\} \quad (4)$$

$$t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\},$$

где  $y(x)$   $n$ -мерная вектор-функция являющаяся решением задачи Коши

$$\Delta^\beta y(x + 1) = g(x, y(x), v(x)), y(x_0) = y_0. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi_1(y)$ ,  $\varphi_2(z)$  заданные скалярные функции, непрерывные совокупности переменных вместе с  $\frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi_2(z)}{\partial z}$ ,  $f(t, x, z, u)$ ,  $g(x, y, v)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z(y)$ ,  $y_0$  – заданный постоянной вектор,  $t_0, t_1, x_0, x_1$  – заданы,  $u(t)$  ( $v(x)$ ) –  $r$  ( $q$ )-мерная функция вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного множества  $U(V)$ , а  $\Delta^\alpha z(t, x)$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и  $\Delta^\beta y(x)$  ( $0 < \beta < 1$ ) дробные операторы порядка  $\alpha$  и  $\beta$  (см., например, [4, 5]). Управляющую функцию назовем допустимым управлением, если она удовлетворяет ограничению (2).

Предполагается что, при каждом заданном допустимом управлении дискретный аналог задачи Коши, т.е. задача (1)–(5), имеет единственное решение.

Допустимое управление  $(u(t), v(x))$ , доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(4), называется оптимальным управлением, а пара  $(z(t, x), y(x), u(t), v(x))$  – оптимальным процессом. Положим

$$H(t, x, z, u, \psi) = \psi' f(t, x, z, u), M(x, y, v, p) = p' g(x, y, v).$$

Функция  $H(t, x, z, u, \psi)$  — называется функцией Гамильтона-Понтрягина для рассматриваемой задачи (1)–(5). Теперь предположим, что  $(p(x), \psi(t, x))$  является решением следующей системы линейных однородных дробного порядка разностных уравнений

$$\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi(t-1, x-1) = H_z[t, x], \quad \psi(t_1-1, x) = -\frac{\partial\varphi_2(z)}{\partial z},$$

$$\Delta^{\beta}_{\rho(t_1)}p(x-1) = M_y[x], \quad p(x_1-1) = -\frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y}.$$

**Теорема 1.** Если множества

$$f(t, x, z^0, U) = \{\tau : \tau := f(t, x, z, u), u \in U\},$$

$$g(x, y^0, V) = \{\sigma : \sigma := g(x, y, v), v \in V\}$$

выпуклы, то для оптимальности допустимого управления  $(u^0(t), v^0(x))$  в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{u^0(t)} H[t, x] \leq 0, \quad \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v^0(x)} M[x] \leq 0,$$

выполнялось для любого  $u(t) \in U, t \in T, v(x) \in V, x \in X$  соответственно.

**Теорема 2.** Пусть множества  $U$  и  $V$  выпуклы, а  $f(t, x, z, u), g(x, y, v)$  непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(z, u), (y, v)$  соответственно. Тогда для оптимальности допустимого управления  $(u^0(t), v^0(x))$  необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(u(t) - u^0(t)) \leq 0, \quad \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(v(x) - v^0(x)) \leq 0,$$

выполнялось для любого  $u(t) \in U, t \in T, v(x) \in V, x \in X$  соответственно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиева С. Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника. 2021. 54. С. 4–11.
2. Мансимов К. Б. Дискретные системы. БГУ, 2013. 161 с.
3. Москаленко А. И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. 1. С. 69–95.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 263 с.
5. Jagan Mohan J., Deekshitulu G. V. S. R. Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publish. Corporat. Int. J. Different. Equat. 2012. Article ID 780619. С. 1–11.

Алиева Саадат Тофик кызы

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,  
Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской  
Республики (ИСУ МНОАР)  
E-mail: saadata@mail.ru

Мансимов Камил Байрамали оглы

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан  
Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской  
Республики (ИСУ МНОАР)  
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com



ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КАСКАДНОЙ ПАРОЙ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ  
В КЛАССЕ ГЛАДКИХ УПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. А. В. АРГУЧИНЦЕВ, В. П. ПОПЛЕВКО

**Аннотация.** В классе гладких управляющих воздействий исследуется задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Рассматривается случай, когда функция, входящая в правую часть системы, определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Управляющие воздействия стеснены поточечными (амплитудными) ограничениями. Для такого рода задач неприменимы методы оптимального управления, основанные на использовании принципа максимума Л. С. Понтрягина, его следствий и модификаций. Предлагаемый подход основан на использовании специальной вариации, которая обеспечивает гладкость варьируемых управлений и выполнение ограничений. Предложена основанная на необходимом условии схема метода улучшения допустимого управления.

**Ключевые слова:** гиперболическая система, запаздывание, гладкие управляющие воздействия, необходимое условие оптимальности.

**AMS Subject Classification:** 49J20, 49M05

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s, t) \frac{\partial x}{\partial s} = f(x(s, t), y(t), s, t), \quad (s, t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1]. \quad (1)$$

Здесь  $x(s, t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция,  $A(s, t)$  –  $n \times n$  – матрица,  $y(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция.

Предполагаем, что система (1) записана в инвариантном виде, то есть матрица  $A(s, t)$  – диагональная. Дополнительно считаем, что диагональные элементы  $a_i = a_i(s, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , матрицы коэффициентов знакопостоянны в  $\Pi$ :

$$a_i(s, t) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1; \quad a_i(s, t) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2; \\ a_i(s, t) < 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n.$$

Составим две диагональные подматрицы:  $A^+(s, t)$  размера  $m_1 \times m_1$  и  $A^-(s, t)$  размера  $(n - m_2) \times (n - m_2)$  из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы  $A$  соответственно. Из вектора состояния  $x = x(s, t)$  также выделим два подвектора, соответствующие положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы  $A$ :

$$x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n).$$

Начально-краевые условия для системы (1) зададим в следующем виде

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0, t) = \eta(t), \quad x^-(s_1, t) = \mu(t), \quad t \in T. \quad (2)$$

Исследование Аргучинцева А. В. выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, <https://rscf.ru/project/23-21-00296/>.



Функция  $y(t)$  определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию

$$\frac{dy}{dt} = g(y(t), y(t-h), u(t), t), \quad t \in T, \quad y(t) = y^0(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad h = \text{const} > 0. \quad (3)$$

В дальнейшем будем обозначать  $z(t) = y(t-h)$ .

Задача рассматривается в классе гладких управляющих воздействий: управление  $u(t)$  непрерывно дифференцируемо на отрезке  $T$  и удовлетворяет поточечным ограничениям типа включения

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (4)$$

где  $U$  – компакт из  $E^r$ .

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s, t_1), s) ds + \iint_{\Pi} F(x, s, t) ds dt, \quad (5)$$

определенного на решениях задачи (1)–(3) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (4).

Задача оптимального управления (1)–(5) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы  $a_i(s, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  матрицы  $A$  непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике  $\Pi$ ;

2) вектор-функции  $\eta(t)$ ,  $\mu(t)$  и  $x^0(s)$  непрерывны соответственно на  $T$  и  $S$ ;

3) для (2) выполнены условия согласования:  $\eta(t_0) = (x^0(s_0))^+$ ,  $\mu(t_0) = (x^0(s_1))^-$ ;

4) вектор-функция  $g = g(y, z, u, t)$  непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по  $y, z \in E^m$  и  $u \in U$ ;

5) вектор-функция  $f(x, y, s, t)$  непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по  $x \in E^n$  и  $y \in E^m$ ;

6) скалярные функции  $\varphi = \varphi(x, s)$ ,  $F = F(x, s, t)$ , непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по  $x \in E^n$ .

Для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1)–(3) из класса непрерывных в  $\Pi$  функций, каждая компонента которого непрерывно дифференцируема вдоль соответствующего семейства характеристик.

**2. Формула приращения целевого функционала.** Рассмотрим два произвольных допустимых процесса:  $\{u, y = y(t, u), x = x(s, t, u)\}$  и  $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{y} = y + \Delta y = y(t, \tilde{u}), \tilde{x} = x + \Delta x = x(s, t, \tilde{u})\}$ . В дальнейшем обозначим дифференциальный оператор в (1) через  $D_A x = x_t + A(s, t)x_s$ .

Тогда задача в приращениях имеет вид:

$$D_A \Delta x = \Delta f(x, y, s, t), \quad \Delta x(s, t_0) = \Delta x^+(s_0, t) = \Delta x^-(s_1, t) = 0, \quad (6)$$

$$\Delta y_t = \Delta g(y, z, u, t), \quad \Delta y(t) = 0, \quad t \in [t_0 - h, t_0]. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta f(x, y, s, t) = f(\tilde{x}, \tilde{y}, s, t) - f(x, y, s, t)$ ,  $\Delta g(y, z, u, t) = g(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, t) - g(y, z, u, t)$ .

Запишем приращение функционала и проделаем ряд достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка.

Добавим нулевые слагаемые

$$\iint_{\Pi} \langle \psi(s, t), D_A \Delta x - \Delta f(x, y, s, t) \rangle ds dt, \quad \int_T \langle p(t), \Delta y_t - \Delta g(y, z, u, t) \rangle dt,$$

где  $\psi(s, t)$  и  $p(t)$  – пока неопределенные  $n$ -мерная и  $m$ -мерная вектор-функции соответственно. Здесь через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначается скалярное произведение в Евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Применим обычную и обобщенную [1] формулы интегрирования по частям.

Введем скалярные функции

$$H(\psi, x, y, s, t) = \langle \psi, f(x, y, s, t) \rangle - F(x, s, t); \quad h(p, y, z, u, t) = \langle p, g(y, z, u, t) \rangle.$$

Потребуем, чтобы функции  $\psi(s, t)$ ,  $p(t)$  являлись решением следующей сопряженной задачи

$$\begin{aligned} D_A \psi + A_s \psi &= -H_x(\psi, x, y, s, t), \quad \psi(s, t_1) = -\varphi_x(x(s, t_1), s), \\ \psi^+(s_1, t) &= 0; \quad \psi^-(s_0, t) = 0, \quad t \in T; \end{aligned} \quad (8)$$

$$p_t = \begin{cases} -h_y[t] - h_z[t+h] - \int_S H_y(\psi, x, y, s, t) ds, & t \in [t_0; t_1 - h], \\ -h_y[t] - \int_S H_y(\psi, x, y, s, t) ds, & t \in [t_1 - h; t_1]. \end{cases} \quad (9)$$

$$p(t_1) = 0; \quad p(t) \equiv 0, \quad t > t_1.$$

Здесь

$$h_y[t] = h_y(p(t), y(t), z(t), u(t), t); \quad h_z[t+h] = h_z(p(t+h), y(t+h), z(t), u(t+h), t+h),$$

$\psi^+$ ,  $\psi^-$  – вектор-функции тех же размеров, что и  $x^+$ ,  $x^-$ .

Тогда формула приращения функционала принимает вид

$$\Delta J(u) = - \int_T \Delta_{\tilde{u}} h(p(t), y(t), z(t), u(t), t) dt + \eta,$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \int_S o_\varphi(|\Delta x(s, t_1)|) ds + \iint_{\Pi} [o_H(|\Delta x(s, t)| + o_H(|\Delta y(t)| + \langle \Delta_{\tilde{x}} H_y(\psi, x, y, s, t), \Delta y(t) \rangle)] ds dt + \\ &+ \int_T [o_h(|\Delta y(t)|) + \langle \Delta_{\tilde{u}} h_y(p, y, z, u, t), \Delta y(t) \rangle + \langle \Delta_{\tilde{u}} h_z(p, \tilde{y}, z, u, t), \Delta z(t) \rangle] dt + \\ &+ \int_T [o_h(|\Delta z(t)|) + \langle \Delta_{\tilde{y}} h_z(p, y, z, u, t), \Delta z(t) \rangle] dt. \end{aligned}$$

При выполнении (6), (7) справедливы следующие оценки:

$$\gamma(t) = \max_{(\xi, \tau) \in \Pi(t)} |\Delta x(\xi, \tau)| \leq M \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t |\Delta u(\tau)| d\tau, \quad \Pi(t) = \{(\xi, \tau) \in \Pi : \tau \leq t\}; \quad (10)$$

$$\gamma_1(t) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |\Delta y(\tau)| \leq K \int_{t_0}^t |\Delta u(\tau)| d\tau, \quad (11)$$

где  $K = L_1 \cdot e^{2L_1(t_1-t_0)}$ ,  $M = L \cdot K \cdot e^{L(t_1-t_0)}$ . Здесь  $L$  – константа Липшица для функции  $f$ ,  $L_1$  – константа Липшица для функции  $g$ .

**3. Необходимое условие оптимальности и метод улучшения.** Используем общую методику [1], [2], основанную на применении неклассической вариации, обеспечивающей гладкость допустимых управлений.

Проварьированное управление строится по правилу

$$u_{\varepsilon, \delta}(t) = u(t + \varepsilon \delta(t)), \quad t \in T. \quad (12)$$

Здесь  $\varepsilon \in [0, 1]$  – параметр варьирования,  $\delta(t)$  – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию  $t_0 \leq t + \delta(t) \leq t_1$ ,  $t \in T$ . Так как допустимые управления – гладкие функции, используем следующее разложение  $\Delta u = \dot{u}(t)\varepsilon\delta(t) + o(\varepsilon)$ .

С помощью оценок (10), (11) получим

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_T \langle h_u, \dot{u} \rangle \delta(t) dt + o(\varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности  $\delta(t)$  вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если процесс  $\{u(t), y(t), x(s, t)\}$  является оптимальным в рассматриваемой задаче, то выполняется условие

$$\omega(t) = \langle h_u(p(t), y(t), z(t), u(t), t), \dot{u}(t)) \rangle = 0, \quad t \in T,$$

где  $p(t)$  – решение сопряженной задачи (8), (9), вычисленное на рассматриваемом процессе.

Опишем общую схему метода. Выберем произвольное допустимое управление  $u^0 = u^0(t)$  и положим  $k = 0$ . По управлению  $u^k$  строим решения  $x^k$ ,  $y^k$  прямой и  $\psi^k$ ,  $p^k$  сопряженной задач. На полученных решениях вычисляется значение функционала  $J^k = J(u^k)$  и строится функция  $\omega_k(t) = \langle h_u(p^k, y^k, z^k, u^k, t), \dot{u}^k \rangle$ . Далее, проверяется условие оптимальности  $\omega_k(t) = 0$ . Если оно выполнено, то метод заканчивает свою работу. В противном случае строится гладкая вариация управления по формуле (12). Возможны различные конструктивные способы для выбора функции  $\delta(t)$ . В частности, при численных расчетах неплохо показал себя следующий вариант:

$$\delta_k(t) = \frac{(t - t_0)(t_1 - t)\omega_k(t)}{(t_1 - t_0) \max_{t \in T} |\omega_k(t)|}.$$

Параметр  $\varepsilon_k$  определяем из условия:  $J(u_{\varepsilon_k}^k) = \min J(u_{\varepsilon}^k)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Случай, когда найденное значение этого параметра близко к нулю, соответствует неухудшению функционала на шаге метода. В качестве очередного приближения выбирается  $u^{k+1}(t) = u_{\varepsilon_k}^k(t)$  и итерационный процесс продолжается. Критерием остановки служит одна из ситуаций, полученных на  $k$ -й итерации метода: а) выполнение с заданной точностью необходимого условия оптимальности для функции  $u^k(t)$ ; б) неухудшение значения функционала, полученного на предыдущей  $(k - 1)$ -й итерации. Последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной и сходится в слабом смысле к выполнению необходимого условия оптимальности, сформулированного в теореме 1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами. М. : Физматлит, 2007. 165 с.
2. Arguchintsev A. V., Poplevko V. P. An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. № 35. С. 3–17.

Аргучинцев Александр Валерьевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: vasilisa@math.isu.ru



## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ЛУЧА НА ДВУХСЛОЙНЫЙ БИОМАТЕРИАЛ

© 2023 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

**Аннотация.** Рассматривается неоднородный по своим физическим характеристикам биологический двухслойный объект, подвергаемый действию на него лазерного излучения. Управление процессом теплового воздействия лазерного луча осуществляется изменением интенсивности температуры лазерного луча на границе биоматериала, влияя на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал. Под построенным тепловым воздействием распределение температурного состояния двухслойного биоматериала из заданного начального состояния на конечном промежутке времени переходит в заданное конечное состояние, минимизируя при этом значение для критерия качества. В предложенном подходе используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления динамических систем.

**Ключевые слова:** двухслойный биологический материал, тепловое воздействие лазерного луча, температурное состояние, оптимальное граничное управление, метод разделения переменных.

**AMS Subject Classification:** 93C95, 70Q05

**1. Введение.** Исследование задач в многослойных физических объектах, которые находятся под воздействием сосредоточенных или распределённых источников, требует рассмотрения соответствующих адекватных математических моделей. При этом адекватностью должны обладать как математические модели, так и методы исследования.

В статье [11] представлен обзор литературы о медико-биологическом применении лазеров. Сфера применения лазерного излучения в медицине выходит далеко за пределы классических понятий о лазере [5]. Невозможно представить современную медицину без применения лазеров. Одно из многочисленных направлений медико-биологического применения лазеров – использование их в качестве инструмента воздействия на биологические объекты. С появлением новых областей применения лазерного излучения для обработки биологических материалов возникает необходимость выработки методик воздействия и критериев параметров лазерных излучателей.

В связи с этим разрабатываются математические модели, призванные решать различные задачи лазерного воздействия и оценивать результаты [11], в частности, задачу выбора режимов теплового воздействия лазерного луча на биологическую среду. Способы воздействия лазерного луча на биологическую среду пока ещё недостаточно исследованы. Поэтому необходимо проведение разносторонних исследований по поиску режимов лазерного излучения для развития возможностей лазерного воздействия и повышения эффективности воздействия на биологические среды.

В настоящей работе в качестве многослойной системы рассмотрен состоящий из двух неоднородных по своим теплофизическим характеристикам биологических слоев объект, подвергаемый действию на него лазерного излучения. Предполагается, что управление процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал осуществляется следующим образом:

---

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

изменяя на верхней (левой) границе двухслойного биоматериала интенсивность температуры лазерного луча, влияем на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Цель статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния из заданного начального состояния на определенном промежутке времени переходит в заданное конечное состояние.

**2. Об основных результатах.** Многослойный биологический материал, который подвергается действию на него лазерного излучения, является системой с распределёнными параметрами [2, 4, 9, 10, 12]. Математическая модель процесса действия лазерного луча на многослойный биологический материал описывается с помощью дифференциальных уравнений теплопроводности в частных производных с краевыми условиями начала и конца лазерного нагрева, граничными условиями взаимодействия внешнего слоя биологического материала и окружающей среды, а также условиями сопряжения между слоями. Математические модели указанных объектов характеризуются как разнородные составные системы с распределёнными параметрами, поэтому целесообразно использовать методы исследования задач управления составных систем (переменной структуры), которым посвящены, в частности, статьи [1, 6–8].

В соответствии с многослойной структурой биоматериала [4, 9, 10] в случае, когда временные и пространственные параметры функции распределения объёмной плотности тепловой мощности в биологическом материале и коэффициенты теплопроводности постоянные, дифференциальное уравнение теплопроводности преобразуется в систему следующих дифференциальных уравнений теплопроводности:

$$\begin{aligned} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial t} &= K_1 \frac{\partial^2 T_1(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in [0, l_1], \quad t \in [t_0, t_1], \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2(z, t)}{\partial t} &= K_2 \frac{\partial^2 T_2(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in [l_1, l_1 + l_2], \quad t \in [t_1, t_2], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_j$  – коэффициент плотности  $j$ -го слоя биологического материала,  $j = 1, 2$ ;  $c_j$  – коэффициент теплоемкости  $j$ -го слоя биологического материала;  $T_j(z, t)$  – температурное поле  $j$ -го слоя в биологическом материале;  $z$  – глубина проникновения лазерного луча в биологическом материале;  $t$  – длительность теплового воздействия;  $K_j$  – коэффициент теплопроводности  $j$ -го слоя биологического материала.

Предположим, что граничные условия теплового воздействия на двухслойный биологический материал следующие

$$T_1(z, t)|_{z=0} = u(t), \quad T_2(z, t)|_{z=l_1+l_2} = P(t), \quad (2)$$

где  $u(t)$  – температура действия лазерного луча на левой границе двухслойного биоматериала, которая поддается изменению по времени;  $P(t)$  – температура действия лазерного луча в конце (на правой границе) двухслойного биологического материала, которая считается известной.

Введем условия сопряжения между слоями, которые выражают условия непрерывности температурных полей по временной координате и условия идеального теплового контакта слоев следующим образом:

$$T_1(z, t)|_{z=l_1-0} = T_2(z, t)|_{z=l_1+0}, \quad K_1 \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z}|_{z=l_1-0} = K_2 \frac{\partial T_2(z, t)}{\partial z}|_{z=l_1+0}. \quad (3)$$

Предполагается, что заданы начальное (при  $t = t_0$ )

$$T_1(z, t)|_{t=t_0} = T_H(z) \quad (4)$$

и конечное (при  $t = t_2$ ) условия

$$T_2(z, t)|_{t=t_2} = T_K(z). \quad (5)$$

Предполагается, что управление процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал осуществляется следующим образом: изменяя на левой границе (в конце) двухслойного биоматериала интенсивность (температуры) лазерного луча влияем тем самым на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Граничная функция  $u(t)$  является управляющим воздействием (т.е. граничным управлением).

Предполагается, что допустимое управление  $u(t)$  принадлежит  $L_2(0, T)$ . Функция  $T_j(z, t) \in L_2(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ , где множество  $\Omega = \{(z, t) : z \in [0, l_1 + l_2], t \in [t_0, t_2]\}$ , а функции  $T_H(z)$ ,  $T_K(z)$  принадлежат  $L_2(0, l_1 + l_2)$ . Предполагается также, что все функции такие, что выполняются некоторые условия согласования.

Требуется найти такой закон оптимального управления  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_0, t_2]$ , теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния, описанного (1), из начального состояния (4) на определённом промежутке времени  $[t_0, t_2]$  переходит в заданное конечное состояние (5), минимизируя функционал

$$\int_{t_0}^{t_2} u^2(t) dt. \quad (6)$$

Таким образом, имеем задачу оптимального управления с неоднородными граничными условиями. Для построения решения целесообразно перейти к задаче с нулевыми граничными условиями.

Ввод обозначения  $a_j^2 = \frac{K_j}{c_j \rho_j}$  ( $j = 1, 2$ ) и переход к новой переменной [1]  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq l_1 + l_2$ ) приводит к растяжению или сжатию отрезка  $[l_1, l_1 + l_2]$  относительно точки  $z = l_1$ . При этом отрезок  $[l_1, l_1 + l_2]$  переходит к отрезку  $[l_1, L]$ , где  $L = l_1 + \frac{a_1}{a_2} l_2$ .

Для удобства, после замены переменной все выше приведённые функции оставляем в исходных обозначениях. Далее, обозначая функцию  $T(\xi, t)$ ,  $\xi \in [0, L]$ ,  $t \in [t_0, t_2]$ ,

$$T(\xi, t) = \begin{cases} T_1(\xi, t), & \xi \in [0, l_1], \quad t \in [t_0, t_1], \\ T_2(\xi, t), & \xi \in [l_1, L], \quad t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

запишем уравнение относительно новой переменной

$$\frac{\partial T(\xi, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 T(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2],$$

с соответствующими условиями для (2)–(5).

Решение задачи сведено к задаче оптимального управления процессом теплового воздействия, который описывается неоднородным уравнением с нулевыми граничными условиями, с соответствующими начальными, конечными состояниями и минимизируемым функционалом (6). Используя метод разделения переменных и учитывая конечные условия, получим, что искомая функция оптимального управления  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_0, t_2]$ , для каждой моды должна удовлетворять некоторым интегральным соотношениям и доставлять минимум функционалу (6). Далее на основе метода проблем моментов [3] для произвольных чисел первых мод построены аналитические выражения для искомого оптимального граничного воздействия и соответствующих функций состояния.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. № 2. С. 41–54.
2. Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. М. : Физматлит, 2003.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968.
4. Мегель Ю. Е., Левкин Д. А. Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2012. 57, № 3/4. С. 4–7.
5. Скобелкин О. К. Лазеры в хирургии. М. : Медицина, 1989.
6. Barseghyan V. R. The problem of control of rod heating process with nonseparated conditions at intermediate moments of time // Archives of Control Sciences. 2021. 31(LXVII), № 3. P. 481–493.
7. Barseghyan V. R. Optimal Boundary Control of a Distributed Heterogeneous Vibrating System with Given States at Intermediate Times // Computational Mathem. and Mathem. Phys. 2022. 62. P. 2023–2032.

8. *Barseghyan V., Solodusha S.* On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non-Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time // *Mathematics*. 2022. 23, № 10. P. 4444.
9. *Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N.* Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates // *Int. J. Solids and Structures*. 2001. 38. P. 8673–8684.
10. *Pyatkov S. G.* Certain inverse problems for parabolic equations // *J. Math. Sci.* 2008. 150, № 5. P. 2422–2433.
11. *Shangina O. R., Gaynutdinova R. D.* Interaction of laser radiation with biological tissues // *Practical medicine*. 2019. 17, № 1. P. 24–27.
12. *Yamaoka N., Sugie J.* Multilayer structures of second-order linear differential equations of Euler type and their application to nonlinear oscillations // *Ukrainian Mathem. J.* 2006. 58, № 12. P. 1935–1949.

Барсегян Ваня Рафаелович  
Институт механики НАН Армении  
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения  
E-mail: [barseghyan@sci.am](mailto:barseghyan@sci.am)

Солодуша Светлана Витальевна  
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [solodusha@isem.irk.ru](mailto:solodusha@isem.irk.ru)



## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОИСКУ ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

© 2023 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

**Аннотация.** В классе линейных по управлению задач оптимального управления предлагается новый подход к поиску особых управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Данный подход основывается на новых условиях оптимальности в виде задач о неподвижной точке, которые эквивалентны известным условиям принципа максимума. Новые формы условий принципа максимума позволяют конструировать новые методы поиска управлений, удовлетворяющих принципу максимума, в том числе особых управлений. Эффективность поиска особых экстремальных управлений иллюстрируется на примере задачи минимизации нормы конечного состояния линейно управляемой системы.

**Ключевые слова:** линейно управляемая система, принцип максимума, задача о неподвижной точке, особые управления, итерационный метод.

**AMS Subject Classification:** 49M20

**Введение** Линейные по управлению задачи оптимального управления часто рассматриваются в теории и практике моделирования управляемых систем в различных приложениях. В связи с этим по-прежнему является актуальным разработка специализированных методов для эффективного решения задач оптимального управления рассматриваемого класса. В частности, в работе [3] для квадратичных по состоянию и линейных по управлению задач разработаны эффективные методы на основе построения специальных условий нелокального улучшения управления. В работе [1] разработаны эффективные методы поиска экстремальных управлений в классе линейно-квадратичных задач оптимального управления на основе задач о неподвижной точке.

В настоящей работе в классе линейных по управлению задач оптимального управления разрабатываются методы поиска экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений, на основе конструирования специальных форм условий принципа максимума в виде операторных задач о неподвижной точке.

**1. Задачи и методы неподвижных точек.** Рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t), t), u(t) \rangle + d(x(t), t)) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (2)$$

в котором переменная  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$  описывает состояние системы, переменная  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m$  характеризует управляющее воздействие в системе. Функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$  дифференцируемы по переменной  $x$  и непрерывны по переменной  $t$  на множестве  $R^n \times T$ . Функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на множестве  $R^n$ . В качестве допустимых управлений  $u(t)$ ,  $t \in T$  рассматривается множество  $V$  кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном и выпуклом множестве  $U \subset R^m$ . Начальное состояние  $x^0$  и временной интервал  $T$  заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $\psi$  в задаче (1), (2) имеет следующий вид:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle,$$
$$H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) - d(x, t) \rangle, \quad H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$



Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (3)$$

Для  $v \in V$  обозначим  $x(t, v)$ ,  $t \in T$  – решение системы (2) при  $u(t) = v(t)$ ;  $\psi(t, v)$ ,  $t \in T$  – решение стандартной сопряженной системы (3) при  $x(t) = x(t, v)$ ,  $u(t) = v(t)$ . Рассмотрим отображение на основе операции максимизации:

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_1(\psi, x, t), w \rangle, \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T.$$

С помощью отображения  $u^*$  условие известного принципа максимума для управления  $u \in V$  в задаче (1), (2) можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Определим отображение  $u^\alpha$  с параметром  $\alpha > 0$  на основе операции проектирования:

$$u^\alpha(\psi, x, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения  $u^\alpha$  условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (5)$$

Управление  $u \in V$  называется экстремальным, если оно удовлетворяет условию принципа максимума. Для экстремальности управления достаточно установить выполнение условия (5) хотя бы для одного  $\alpha > 0$ .

Поиск экстремальных решений существенно усложняется в особых задачах оптимального управления, в которых необходимые условия оптимальности в форме классического принципа максимума не позволяют определять экстремальные решения. В частности, метод краевой задачи принципа максимума и градиентные методы становятся не эффективными в особых задачах.

Рассмотрим функцию переключения  $g(\psi, x, t) = H_1(\psi, x, t)$ . В соответствии с известным определением особого управления [2], управление  $u \in V$  в задаче (1), (2) назовем особым, если для этого управления существует интервал времени  $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие  $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ .

Для особого экстремального управления условия (4) и (5) на особом интервале выполняются тривиально и не могут служить для определения значений экстремального управления на особом интервале. Задача (1), (2) называется особой, если существует хотя бы одно особое экстремальное управление.

Определим отображения  $X$ ,  $\Psi$ ,  $V^\alpha$  следующими соотношениями:

$$X(v) = x, \quad v \in V, \quad x = x(t, v), \quad t \in T;$$

$$\Psi(v) = \psi, \quad v \in V, \quad \psi = \psi(t, v), \quad t \in T;$$

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), \quad t \in T,$$

где  $C(T)$  – пространство непрерывных на  $T$  функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_1^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (6)$$

Введем отображение  $X^\alpha$  следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V,$$

где  $x^\alpha(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_2^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (7)$$

Построим отображение  $\Psi^\alpha$  по правилу:

$$\Psi^\alpha(x, v) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad v \in V,$$

где  $\psi^\alpha(t), t \in T$  – решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_3^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u), \quad u \in V. \quad (8)$$

Можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Задачи о неподвижной точке (7) и (8) являются эквивалентными условию принципа максимума (5).*

На основе условий принципа максимума (6)–(8) в форме задач о неподвижной точке конструируются соответствующие итерационные методы последовательных приближений при  $k \geq 0$ :

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k) = G_1^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (9)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (10)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k) = G_3^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V. \quad (11)$$

Проекционный параметр  $\alpha > 0$  в методах (9)–(11) фиксируется в отличие от стандартного метода проекции градиента. Методы (9)–(11) не содержат операцию параметрического варьирования управления для обеспечения улучшения управления на каждой итерации методов. Трудоемкость реализации каждой итерации методов (9)–(11) оценивается решением двух задач Коши. Сходимость итерационных процессов (9)–(11) можно обосновать при достаточно малых  $\alpha > 0$  на основе известного принципа сжимающих отображений.

**2. Пример особой задачи.** Рассматривается задача минимизации нормы конечного состояния линейно управляемой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, \\ |u(t)| &\leq 1, & t \in T &= [0, 3], \\ \Phi(u) &= 0.5(x_1^2(3) + x_2^2(3)) \rightarrow \inf_{u \in V}. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, t) &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u; \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3) &= -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(3) &= -x_2(3). \end{aligned}$$

Условие принципа максимума и краевая задача принципа максимума принимают вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sign}(\psi_2(t, u)), & t \in T; \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), & x_2(0) &= -1, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3) &= -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(3) &= -x_2(3). \end{aligned}$$

Анализ краевой задачи принципа максимума показывает, что экстремальные управления могут быть только особыми. Соответствующая функция переключения  $g(\psi, x, t) = \psi_2$  на экстремальном управлении тождественно равна нулю. При этом последовательное дифференцирование этого тождества в силу фазовой и сопряженной систем также приводит к соотношениям, выполняющимся тождественно, которые не позволяют определять особые значения экстремального управления.

Для поиска особых экстремальных управлений применялись проекционные методы (9)–(11), не использующие процедуру определения особых значений управления из указанных выше тождеств. Проведенные расчеты в рамках модельной задачи показывают эффективность рассматриваемых проекционных методов принципа максимума для поиска экстремальных управлений на особых интервалах.

**Заключение** В классе линейных по управлению задач оптимального управления на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке построены итерационные методы, позволяющие находить особые экстремальные управления.

Разработанные операторные методы поиска экстремальных управлений, в том числе особых управлений, характеризуются следующими свойствами:

1. нелокальность последовательных приближений управления, получаемых расчетом двух задач Коши для фазовых и сопряженных переменных на каждой итерации;
2. вычисление значений приближений особого экстремального управления без использования условия тождественного равенства нулю функции переключения.

Указанные свойства предлагаемых методов являются важными для повышения эффективности поиска особых экстремальных управлений в рассматриваемом классе линейных по управлению задач оптимального управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. 224. С. 19–27.
2. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск : Изд-во ИГУ, 1994.
3. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Физматлит, 2000.

Булдаев Александр Сергеевич

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (БГУ)

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (БГУ)

E-mail: kazminvanya@mail.ru



МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ  
ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ,  
СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ УПРАВЛЕНИЯ  
ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

© 2023 г. Н. М. ДМИТРУК, Д. А. КОСТЮКЕВИЧ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления линейной системой с возмущениями, возникающая в теории управления по прогнозирующей модели. Исследуются решения задачи в классе гарантирующих программ и в классе многократно замыкаемых стратегий управления. Обсуждаются вычислительные аспекты построения оптимальных стратегий и подходы к учету структуры получаемых задач с целью их эффективного решения.

**Ключевые слова:** линейная система, возмущения, оптимальное гарантированное управление, стратегия управления, управление по прогнозирующей модели.

**AMS Subject Classification:** 93C05, 93B52, 49N05

**1. Введение.** Управление по прогнозирующей модели (Model predictive control, [7]) – популярный метод управления по принципу обратной связи, применяемый для решения задач стабилизации линейных и нелинейных систем. Метод предполагает решение в реальном времени так называемых прогнозирующих задач оптимального управления на конечном промежутке времени, где в качестве начального состояния системы используется измеренное реальное состояние управляемого объекта. Оптимальное решение прогнозирующей задачи используется для управления системой до тех пор, пока не будет получено следующее измерение состояния.

При наличии в системе возмущений прогнозирующая задача может иметь различные формулировки [6]. Например, применение задач программной оптимизации в качестве прогнозирующих в настоящий момент считается неэффективным, вместо них используются задачи построения стратегий управления, в которых учитываются некоторые элементы обратной связи, как это сделано в работах [4, 6, 8]. В настоящем докладе для прогнозирующей задачи оптимального управления из [4] развивается метод построения стратегий управления с замыканиями [1–3, 5].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим дискретную стационарную линейную систему управления с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – состояние системы (1),  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  – управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  – возмущение в момент времени  $t$ ;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , начальное состояние  $x_0$  задано.

На управления и состояния системы (1) наложены ограничения:

$$\begin{aligned} u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : \|u\|_\infty \leq u_{\max}\}, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ x(t) \in X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : H(t)x \leq g(t)\}, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $H(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $g(t) \in \mathbb{R}^m$  таковы, что множества  $X(t)$  ограничены.

---

Проект реализуется победителем конкурса «Поддержка профессионального развития» благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина, договор гранта № ГЮПР-0006/23.

Возмущения, действующие на систему (1), неизвестны и ограничены:

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_\infty \leq w_{\max}\}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Цель управления системой (1) – минимизация критерия качества,

$$\sum_{t=0}^{T-1} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty \quad (3)$$

при условии гарантированного (при любой реализации возмущений) выполнения ограничений (2). В критерии (3) матрицы  $Q, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$  невырождены.

Траекторию системы (1), соответствующую управлению  $u(\cdot) = (u(0), u(1), \dots, u(T-1))$  и возмущению  $w(\cdot) = (w(0), w(1), \dots, w(T-1))$  будем обозначать  $x(t|x_0, u, w)$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$ . Для любого интервала  $\Delta_j = \{T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1\}$  с  $0 \leq T_j < T_{j+1} \leq T$  обозначим через  $u_j(\cdot) = (u_j(t), t \in \Delta_j)$ ,  $w_j(\cdot) = (w_j(t), t \in \Delta_j)$  – управление и возмущение на  $\Delta_j$ ,  $x(t|x_j, u_j, w_j)$  – состояние в момент времени  $t$  системы (1) с начальным состоянием  $x(T_j) = x_j$ , управлением  $u_j(\cdot)$  и возмущением  $w_j(\cdot)$ .

Простейший подход к решению поставленной задачи оптимального управления состоит в нахождении оптимальной гарантирующей программы – управления  $u(\cdot)$ , зависящего только от времени  $t$ , гарантирующего выполнение ограничений

$$x(t|x_0, u, w) \in X(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \forall w(\cdot) \in W^T,$$

и минимизирующего гарантированное (наихудшее по отношению к возмущениям) значение критерия качества

$$\max_w \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty \right\}.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи в классе гарантирующих программ дает минимаксная задача оптимального управления

$$\min_u \max_w \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty \right\}, \quad (4)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\|u(t)\|_\infty \leq u_{\max}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

$$H(t)x(t) \leq g(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \forall w(\cdot) \in W^T.$$

Задача (4) может быть сведена к задаче линейного программирования после ряда эквивалентных преобразований, см. например, [4].

**3. Многократно замыкаемая стратегия управления.** Пусть зафиксированы моменты времени  $T_j \in \{1, 2, \dots, T-1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $T_1 < T_2 < \dots < T_N$ , которые будем называть моментами замыкания. Они разбивают интервал управления на  $\Delta_j = \{T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T_{N+1} = T$ .

В зависимости от конкретного возмущения  $w_j^*(\cdot)$ , которое реализуется в реальном процессе управления на промежутке  $\Delta_j$ , система в момент  $T_{j+1}$  окажется в состоянии, которое будем обозначать  $x^*(T_{j+1})$ . Очевидно,  $x^*(T_{j+1}) \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , где

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j), \quad w_j(\cdot) \in W^{T_{j+1}-T_j}\},$$

– множество возможных состояний системы (1) в момент времени  $T_{j+1}$ .

Относительно моментов замыкания предполагаем, что в каждый момент  $T_j$  можно будет:

1. точно измерить текущее состояние  $x^*(T_j)$  системы;
2. в зависимости от измеренного  $x^*(T_j)$  выбрать новое управление  $u_j(t|x^*(T_j))$ ,  $t \in \Delta_j$ .

Учитывая сделанное предположение, будем искать решение поставленной задачи оптимального управления в классе стратегий управления  $\pi_N(0, x_0)$  с  $N$  моментами замыкания, которую определим рекуррентно на основе стратегий  $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$  с  $N - j$  моментами замыкания,  $j = N - 1, N - 2, \dots, 1$ :

$$\begin{aligned}\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) &= \{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}); u_N(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\}, \\ \pi_{N-j}(T_j, x_j) &= \{u_j(\cdot|x_j); \pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)\}, \\ \pi_N(0, x_0) &= \{u_0(\cdot|x_0); \pi_{N-1}(T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\}.\end{aligned}\quad (5)$$

Допустимость стратегии (5) определяется рекуррентно, применяя аргументы динамического программирования последовательно к каждому промежутку  $\Delta_j$ , начиная с  $j = N$ . В результате получим включения, определяющие допустимую стратегию:

$$\begin{aligned}x(t|x_j, u_j, w_j) &\in X(t), \quad t = T_j + 1, T_j + 2, \dots, T_{j+1}, \quad \forall w_j(\cdot) \in W^{T_{j+1}-T_j}, \\ X(T_{j+1}|x_j, u_j) &\subseteq X_{j+1}.\end{aligned}$$

Здесь множества  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , называются множествами замыкания в момент  $T_j$ . Каждое из этих множеств состоит из всех точек  $x_j \in \mathbb{R}^n$  для которых существует стратегия управления  $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$  с  $N - j$  моментами замыкания,  $X_{N+1} = \mathbb{R}^n$ .

Оптимальная стратегия управления  $\pi_N^0$  определяется оптимальными начальными программами  $u_j^0(\cdot|x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , которые находятся как решения уравнений Беллмана

$$V_j(x_j) = \min_{u_j} \max_{w_j} \left\{ \sum_{t=T_j}^{T_{j+1}-1} (\|Qx(t|x_j, u_j, w_j)\|_\infty + \|Ru_j(t)\|_\infty) + V_{j+1}(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)) \right\}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}x_j &\in X_j, \quad j = 0, \dots, N, \\ V_{N+1}(x) &= \|Px\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

при условии выполнения ограничений (2).

**4. Вычислительные аспекты построения оптимальных стратегий.** На практике вычисление оптимальных начальных программ  $u_j^0(\cdot|x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , опирается на возможность сведения задач (6) к задаче линейного программирования. Для этого определим множества

$$X_j(\alpha) = \{x_j \in \mathbb{R}^n : V_j(x_j) \leq \alpha\}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha \in [\alpha_{\min}^j, \alpha_{\max}^j]. \quad (7)$$

Следуя рассуждениям работы [3], можно показать, что множества (7) являются выпуклыми многогранниками, а зависимость от параметра  $\alpha$  является линейной:

$$X_j(\alpha) = \{x_j \in \mathbb{R}^n : P_j x_j \leq g_j + \lambda_j \alpha\}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

В представлении (8) для построения матриц  $P_j \in \mathbb{R}^{m_j \times n}$  необходимо знать нормальные векторы  $p_{ji}$  к многогранникам (7), а для вычисления векторов  $g_j$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}^{m_j}$  – решать задачи (см. также [3])

$$f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j, u_j} p_{ji}^\top x_j, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu_j(t), \quad x_0(T_j) = x_j, \\ x^l(t+1) &= Ax^l(t) + Bu_j(t) + Mw_j^l(t), \quad x^l(T_j) = x_j, \quad l \in L_j, \\ \|u_j(t)\|_\infty &\leq u_{\max}, \quad t = T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1, \\ H(t)x_0(t) &\leq g(t) - \gamma_j(t), \quad t = T_j + 1, T_j + 2, \dots, T_{j+1}, \\ \sum_{t=T_j}^{T_{j+1}-1} &\left( \|Qx^l(t)\|_\infty + \|Ru_j(t)\|_\infty \right) + V_{j+1}(x^l(T_{j+1})) \leq \alpha, \quad l \in L_j,\end{aligned}$$

где  $\gamma_j(t) = (\gamma_{ji}(t), i = 1, 2, \dots, m)$ :  $\gamma_{ji}(t) = w_{\max} \sum_{s=T_j}^{t-1} \|h_i(t)^\top A^s M\|_1$ ,  $w_j^l(\cdot)$  –  $l$ -ая вершина гиперкуба  $W^{T_{j+1}-T_j}$ ,  $l \in L_j$ .

Оптимальные начальные программы  $u_j^0(\cdot|x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , могут быть найдены как решения следующих задач:

$$\begin{aligned} & \min_{u_j, \alpha_j, \alpha_{j+1}} \alpha_j, & (10) \\ & x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu_j(t), \quad x_0(T_j) = x_j, \\ & x^l(t+1) = Ax^l(t) + Bu_j(t) + Mw_j^l(t), \quad x^l(T_j) = x_j, \quad l \in L_j, \\ & \|u_j(t)\|_\infty \leq u_{\max}, \quad t = T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1, \\ & H(t)x_0(t) \leq g(t) - \gamma(t), \quad t = T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1, \\ & \sum_{t=T_j}^{T_{j+1}-1} \left( \|Qx^l(t)\|_\infty + \|Ru_j(t)\|_\infty \right) + \alpha_{j+1}^l \leq \alpha_j, \\ & P_{j+1}x^l(T_1) - \lambda_{j+1}\alpha_{j+1}^l \leq g_{j+1}, \quad l \in L_j. \end{aligned}$$

Отметим, что все множества (8) строятся до начала процесса управления, тогда же решается задача (10) при  $j = 0$ . При  $j = 1, 2, \dots, N$ , задачи (10) решаются в моменты  $T_j$  для измеренного состояния  $x_j = x^*(T_j)$ , множества (8) в коррекции не нуждаются.

Основную вычислительную сложность представляет решение задач (9) и быстрое решение (10) при  $j = 1, 2, \dots, N$ . Все эти задачи сводятся к задачам линейного программирования, однако имеют огромные размерности, связанные с необходимостью перенумерации вершин гиперкубов  $W^{T_{j+1}-T_j}$ . В докладе обсуждается блочная структура матриц получаемых задач и ее адекватное использование для ускорения вычислений при решении задач (9) и (10).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балашевич Н. В., Габасов, Кириллова Ф. М.* Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. 44, № 2. С. 265–286.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А.* Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи // Автоматика и телемеханика. 1996. № 8. С. 90–99.
3. *Дмитрук Н. М.* Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. 28, № 3. 66–82 с.
4. *Vemprad A., Borrelli F., Morari M.* Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems // IEEE Trans. on Automatic Control 2003. 48, № 9. 1600-1606 pp.
5. *Kostyukova O., Kostina E.* Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances // Mathematical programming. 2006. 107, № 1–2. 131–153 pp.
6. *Lee J. H., Yu Z.* Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters // Automatica. 1997. 33, № 15. 763–781 pp.
7. *Rawlings J. B., Mayne D. Q.* Model Predictive Control: Theory and Design. Madison : Nob Hill Publishing, 2009. 576 pp.
8. *Scokaert P. O. M., Mayne D. Q.* Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems // IEEE Transactions on Automatic control. 1998. 43, № 8. 1136–1142 pp.

Дмитрук Наталия Михайловна

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

E-mail: dmitruk@bsu.by

Костюкевич Дмитрий Аркадьевич

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

E-mail: KostukDA@bsu.by



## МЕТОДЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ В ЛИНЕЙНОМ ДВУХУРОВНЕВОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

© 2023 г. Н. В. ДРЕСВЯНСКАЯ, О. В. ХАМИСОВ

**Аннотация.** Задача линейного двухуровневого программирования сводится к одноуровневой задаче линейного программирования с дополнительным обратно-выпуклым кусочно-линейным ограничением, заданным в неявной форме. Для решения одноуровневой задачи и в локальном и в глобальном смысле применяется аппарат кусочно-линейных выпуклых опорных функций. Приводится описание соответствующих вычислительных схем, а также результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** двухуровневое программирование, опорные функции, локальный поиск, глобальная оптимизация.

**AMS Subject Classification:** 90C33, 90C26

**1. Постановка задачи.** Исследуемая задача линейного двухуровневого программирования имеет вид:

$$c_1^\top x + d_1^\top y \rightarrow \min_{x,y}, \quad (1)$$

$$A_1 x + B_1 y \leq r_1, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad (2)$$

$$d_2^\top y \rightarrow \min_y, \quad (3)$$

$$A_2 x + B_2 y \leq r_2, \quad y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}, \quad (4)$$

где  $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $A_i - m_i \times n_1$  матрицы,  $B_i - m_i \times n_2$  матрицы,  $r_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $X$ ,  $Y$  – выпуклые многогранные множества. Требуется найти *оптимистическое* решение задачи (1)-(4).

Введём в рассмотрение функцию оптимального значения задачи второго уровня

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y} \{d_2^\top y : B_2 y \leq r_2 - A_2 x\} = \min_{y \in Y(x)} d_2^\top y, \quad (5)$$

$$Y(x) = \{y \in Y : B_2 y \leq r_2 - A_2 x\}, \quad (6)$$

и перейдём от задачи двухуровневого программирования (1)-(4) к задаче одноуровневого программирования

$$c_1^\top x + d_1^\top y \rightarrow \min_{x,y}, \quad (7)$$

$$A_1 x + B_1 y \leq r_1, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad (8)$$

$$A_2 x + B_2 y \leq r_2, \quad y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}, \quad (9)$$

$$d_2^\top y \leq \varphi(x). \quad (10)$$

Поскольку  $\varphi$  есть неявная выпуклая функция, то задача (7)-(10) представляет собой задачу линейного программирования с обратно-выпуклым ограничением (10). Хорошо известно, что для задач линейного программирования функция оптимального значения  $\varphi$  есть выпуклая кусочно-линейная функция.



**2. Локальный поиск.** Идея локального поиска состоит в следующем. Зададим некоторый вектор  $\tilde{x}$  и решим задачу второго уровня (3)-(4) при  $x = \tilde{x}$ . Пусть  $\tilde{y}^*$  и  $\tilde{u}^*$  – решения прямой и двойственной задачи второго уровня соответственно. Тогда

$$\varphi(\tilde{x}) = [(B_2^T \tilde{u}^* + d_2)^T \tilde{y}^*] + (A_2 x - r_2)^T \tilde{u}^* = \quad (11)$$

$$= [(B_2^T \tilde{u}^* + d_2)^T \tilde{y}^*] - r_2^T \tilde{u}^* + (\tilde{u}^*)^T A_2 x = \tilde{p}^T x + \tilde{\rho}, \quad (12)$$

где  $\tilde{p} = A_2^T \tilde{u}^*$ ,  $\tilde{\rho} = [(B_2^T \tilde{u}^* + d_2)^T \tilde{y}^*] - r_2^T \tilde{u}^*$ . Если  $x \neq \tilde{x}$ , то  $\varphi(x) \geq \tilde{p}^T x + \tilde{\rho}$ . Используя явное линейное неравенство  $d_2^T y \leq \tilde{p}^T x + \tilde{\rho}$  вместо неявного нелинейного обратнo-выпуклого неравенства (10), получаем вспомогательную задачу линейного программирования, являющуюся основой для следующей процедуры локального поиска.

- 1) Задать начальный вектор  $x_0$ , присвоить  $k = 0$ ;
- 2) Решить задачу второго уровня для текущего  $x_k$ , получив решения прямой и двойственной задач  $(y_k, u_k)$ ;
- 3) Определить функцию  $l_k(x)$

$$l_k(x) = p_k^T x + \rho_k, \quad p_k = A_2^T u_k, \quad \rho_k = [(B_2^T u_k + d_2)^T y_k] - r_2^T u_k;$$

- 4) Решить вспомогательную задачу линейного программирования

$$c_1^T x + d_1^T y \rightarrow \min_{x,y}, \quad (13)$$

$$A_1 x + B_1 y \leq r_1, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad (14)$$

$$A_2 x + B_2 y \leq r_2, \quad y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}, \quad (15)$$

$$d_2^T y \leq l_k(x); \quad (16)$$

- 5) Пусть  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  – решение вспомогательной задачи. Обновить счётчик итераций  $k = k + 1$  и перейти на 2).

Критерием останoвки служит совпадение решений вспомогательной задачи на двух последовательных итерациях:  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k)$ . В докладе обсуждаются условия, при которых локальное решение исходной задачи линейного двухуровневого программирования получается за конечное число итераций.

**3. Глобальный поиск.** Если локальный поиск основан на построении явных линейных опорных минорант функции  $\varphi$ , то глобальный поиск основан на использовании явных кусочно-линейных выпуклых мажорант  $\varphi$ . Ранее такой подход применялся в [1]. В этом случае глобальный поиск состоит в решении последовательности *явных* обратнo-выпуклых задач, на основе хорошо разработанных явных методов обратнo-выпуклой оптимизации.

В докладе приводятся результаты численных экспериментов и обоснование сходимости глобального поиска к решению задачи двухуровневого программирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khamisov O.* Quadratic support functions in quadratic bilevel problems // in: Operationa Research Proceedings 2017. Springer International Publishing, 2018. P. 105–110.

Дресвянская Надежда Владимировна

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: dnv90@mail.ru

Хамисов Олег Валерьевич

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: khamisov@isem.irk.ru



## ОБЩИЙ ПОЗИЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОПОРНЫМИ МАЖОРАНТАМИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. В. А. ДЫХТА

Аннотация. Необходимое условие глобальной оптимальности для дискретных задач управления в форме позиционного принципа минимума к настоящему времени доказано лишь для случая квазилинейной опорной мажоранты функционала – решения неравенства типа Гамильтона – Якоби для слабо убывающих функций, которое полностью задается котраекторией исследуемого процесса. Нелинейные решения указанного неравенства использовались для оценки сверху оптимального значения задачи и методов позиционного спуска по функционалу. В отличие от квазилинейных мажорант, для нелинейных решений не исследовался важный вопрос: при каких условиях оптимальная траектория задачи необходимо является решением так называемой присоединенной задачи динамической оптимизации на множестве траекторий потенциального спуска? Мажоранты, обладающие данным свойством, называются опорными. В статье найдены условия опорности для двух классов задач: а) для которых верен дискретный принцип максимума; б) для обобщенных решений, оптимальных в овыпукленной задаче с траекториями, реализуемыми в исходной постановке.

**Ключевые слова:** неравенство Гамильтона – Якоби, принцип максимума, позиционное управление.

**AMS Subject Classification:** 49K15, 49L99

**1. Введение.** Статья посвящена необходимым условиям глобальной оптимальности для следующей задачи оптимального управления (задачи (P)):

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2)$$

$$J(\sigma) = l(x(N)) \rightarrow \min.$$

Здесь  $x(t) \in R^n$ ,  $U \subset R^m$  – компактное множество,  $T = \{0, \dots, N-1\}$ , через  $\sigma$  обозначены пары последовательностей векторов  $\{x(t), u(t)\}$ ,  $t \in T \cup \{N\}$ , вектор-функция  $f$  предполагается непрерывной по  $(x, u)$  при каждом  $t \in T$  и гладкой по  $x$ , целевая функция  $l$  непрерывно дифференцируема.

Через  $D$  будет обозначаться множество всех допустимых последовательностей  $\sigma$ , а через  $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\} \in D$  – последовательность, исследуемая на оптимальность.

Обозначим через  $\Phi$  множество функций  $\varphi(t, x) : T \times R^n \rightarrow R$ , гладких по  $x \quad \forall t \in T$ , и введем в рассмотрение неравенство типа Гамильтона-Якоби

$$\min_{u \in U} \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n, t \in T \quad (3)$$

с граничным условием

$$\varphi(N, x) = l(x). \quad (4)$$

Решения неравенства (3) (даже без гладкости по  $x$ ) обладают следующим свойством слабого убывания:  $\forall$  начальной позиции  $(t_*, x_*)$  существует траектория  $\{x^*(t)\}$ ,  $t = t_*, \dots, N$  системы (1) с соответствующим управлением  $\{u^*(t)\}$ , такая, что

$$\varphi(t+1, x^*(t+1)) \leq \varphi(t, x^*(t)), \quad t = t_*, \dots, N-1. \quad (5)$$

Если  $\varphi$  удовлетворяет граничному условию (4), то  $\varphi$ -убывающая траектория  $\{x^*(t)\}$  со свойством (5) при  $t_* = 0$  позволяет получить следующую оценку сверху функционала

$$\varphi(0, x_0) \geq \varphi(N, x^*(N)) = l(x^*(N)). \quad (6)$$

В силу этой оценки функции  $\varphi \in \Phi$ , являющиеся решением неравенства Гамильтона-Якоби (3), (4), назовем *мажорантами* функционала задачи (P).

Из (6) следует массовое достаточное условие неоптимальности: все процессы  $\sigma \in D$ , для которых  $l(x(N)) > \varphi(N, x^*(N))$ , не оптимальны. Другими словами, любая мажоранта  $\varphi$  доставляет инструмент отсева неоптимальных процессов посредством  $\varphi$ -убывающих траекторий. Для повышения эффективности процедуры отсева естественно использовать  $\varphi$ -убывающие траектории наискорейшего спуска.

Формализация этого замысла по образцу динамического программирования приводит к *общему позиционному принципу минимума* (кратко, к GF-ПМ). Его следует отличать от хорошо известного [4] частного принципа (F-ПМ) с квазилинейной мажорантой.

**2.  $\varphi$ -экстремальные стратегии и присоединенная задача.** Обозначим через  $\mathcal{K}^\varphi(t, x, u)$  функцию, которая получается из левой части неравенства (3), если опустить в ней операцию минимума (иначе говоря,  $\mathcal{K}^\varphi$  – это полное приращение функции  $\varphi$  в силу системы (1)). Определим  $\varphi$ -экстремальное многозначное отображение

$$U^\varphi(t, x) = \underset{u \in U}{\text{Argmin}} \mathcal{K}^\varphi(t, x, u). \quad (7)$$

Очевидно, что оно не пусто, компактнозначно и полунепрерывно сверху по  $x$  для каждого  $t \in T$ . Любой селектор  $v(t, x)$  отображения (7) назовем  $\varphi$ -экстремальным позиционным управлением, или стратегией. Множество всех таких стратегий обозначим через  $\mathcal{V}^\varphi$ .

Для любой стратегии  $v(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$  можно определить траекторию  $x(t; v)$  системы (1) при  $u = v(t, x)$ . Если  $\varphi$  – мажоранта, то легко убедиться, что  $x(t; v)$  –  $\varphi$ -убывающая траектория из множества траекторий наискорейшего спуска. При этом имеет место следующее семейство необходимых условий оптимальности:

$(N(\varphi))$  если процесс  $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\}$  оптимален в задаче (P), то при любой мажоранте  $\varphi$  выполняется неравенство

$$l(\bar{x}(N)) \leq l(x(N; v)) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varphi. \quad (8)$$

Отсюда естественным образом возникает  $\varphi$ -присоединенная экстремальная задача:

$$l(x(N; v)) \rightarrow \min, \quad v \in \mathcal{V}^\varphi \quad (9)$$

и напрашивается вопрос об оптимальности траектории  $\{\bar{x}(t)\}$  в этой задаче.

Очевидно, что для произвольной мажоранты  $\varphi$  ответ отрицательный (неравенства (8) для этого “не хватает”), поскольку априори существование стратегии  $\bar{v}(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$ , порождающей траекторию  $\{\bar{x}(t)\}$ , ниоткуда не следует.

В связи с этим введем

**Определение.** Мажоранту  $\varphi$  назовем *опорной для функционала задачи (P) в точке  $\bar{\sigma}$* , если траектория  $\{\bar{x}(t)\}$  оптимальна в  $\varphi$ -присоединенной задаче при подходящем выборе стратегии  $\bar{v} \in \mathcal{V}^\varphi$ .

Отметим, что условия опорности мажорант в дискретной задаче (P) нельзя получить по образцу задач с непрерывным временем [2], поскольку для задачи (P) аналог принципа максимума Понтрягина не является универсальным необходимым условием оптимальности [3], [1].

**3. Опорные мажоранты в задачах с выпуклым годографом.** Рассмотрим класс задач типа (P), для которых множество  $f(t, x, U)$  (годограф системы (1)) выпукло при всех  $(t, x) \in T \times R^n$ . Для задач этого класса справедлив дискретный принцип максимума (ДПМ), для формулировки которого в фиксированной задаче (P) вводятся функция  $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$ , сопряженная система

$$\begin{cases} \psi(t) = H_x(t, x(t), \psi(t+1), u(t)), & t = N-1, \dots, 1, \\ \psi(N) = l_x(x(N)), \end{cases} \quad (10)$$

и  $H$ -минимизирующее отображение

$$M(t, x, \psi) = \underset{w \in U}{\operatorname{Argmin}} H(t, x, \psi, w). \quad (11)$$

Тогда ДПМ для процесса  $\sigma = \{x(t), u(t)\} \in D$  можно записать в виде включения

$$u(t) \in M(t, x(t), \psi(t+1)) \quad \forall t \in T \quad (12)$$

с соответствующей  $\sigma$  котраекторией системы (10).

Оптимальный процесс  $\bar{\sigma}$  задачи (P) необходимо является экстремальным, т.е. удовлетворяет ДПМ с котраекторией  $\{\bar{\psi}(t)\}$ . При этом нетрудно убедиться, что существует борелевский по  $x$  селектор  $w(t, x, \bar{\psi}(t+1)) \in M(t, x, \bar{\psi}(t+1))$ , генерирующий траекторию  $\{\bar{x}(t)\}$  системы (1).

Гладкую по  $x$  мажоранту  $\varphi$  назовем *совместимой* с траекторией  $\{\bar{x}(t)\}$ , если существует  $\varphi$ -экстремальный селектор  $v(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$ , представимый в виде суперпозиции

$$v(t, x) = w(t, x, \bar{\psi}(t+1)), \quad \bar{\psi}(t+1) = \varphi_x(t+1, \bar{x}(t+1))$$

при  $t \in T$ ,  $x \in R^n$ .

С учетом неравенства (8) свойство совместимости приводит к следующему заключению.

**Теорема 1.** Пусть процесс  $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\}$  оптимален в задаче (P) с выпуклым годографом. Тогда любая мажоранта  $\varphi$ , совместимая с  $\{\bar{x}(t)\}$ , опорна в точке  $\bar{\sigma}$ .

Аналогичный результат имеет место для задач, линейных по фазовой переменной (с управляемой структурой), в которых ДПМ справедлив без всяких предположений выпуклости.

**4. Задачи с выпуклым годографом вдоль обобщенных траекторий.** Следуя [3, § 17], рассмотрим более широкий класс задач, для которых ДПМ остается верен, но имеет нетрадиционную форму.

Введем в рассмотрение овыпукленную (расширенную) дискретную систему

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j(t) f(t, x(t), u_j(t)), & x(0) = x_0, \\ \alpha_j(t) \geq 0, \quad \alpha_1(t) + \dots + \alpha_{n+1}(t) = 1, \\ u_j(t) \in U, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad t \in T \end{cases} \quad (13)$$

с обобщенным управлением  $\mu = \{\alpha_j(t), u_j(t) : j = 1, \dots, n+1\}$ ,  $t \in T$ , и множество  $S$  пар  $s = (\{x(t)\}, \mu)$ , связанных системой (13).

Так как годограф системы (13) – выпуклое множество, то в овыпукленной задаче (со P) минимизации функционала  $J(s) = l(x(N))$  на множестве  $S$  имеет место ДПМ. Пусть  $s^0 = (\{x^0(t)\}, \mu^0)$  – некоторый оптимальный процесс расширенной задачи, удовлетворяющей ДПМ. Предположим, что выполняется следующее условие выпуклости годографа вдоль траектории  $\{x^0(t)\}$ :

$$\text{множество } \Gamma(t, x^0(t)) := f(t, x^0(t), U) \text{ выпукло на } T. \quad (14)$$

В этом предположении  $\{x^0(t)\}$  одновременно является и траекторией исходной системы (1) (реализуемой в ней с некоторым обычным управлением  $\{u^0(t)\}$ ). Поэтому для любого процесса, оптимального в задаче (P), должен выполняться ДПМ ([3, теорема (7.3)]).

Теперь мы можем адаптировать метод предыдущего пункта, чтобы получить следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть вдоль оптимальной обобщенной траектории  $\{x^0(t)\}$  выполняется условие выпуклости (14). Тогда пара  $\sigma^0 = \{x^0(t), u^0(t)\}$  оптимальна и экстремальна в задаче (P) с соответствующей котраекторией  $\{\psi^0(t)\}$ , и любая мажоранта  $\varphi(t, x)$  задачи (P) со свойством  $\varphi_x(t, x^0(t)) = \psi^0(t)$  опорна в точке  $\sigma^0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1971.
2. *Дыхта В. А.* О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона – Якоби спуска в задачах оптимального управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. 28, № 3. С. 83–93.
3. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1988.
4. *Dykhta V. A., Sorokin S.* Feedback Minimum Principle for Optimal Control Problems in Discrete-Time Systems and Its Applications // in: Lecture Notes in Computer Science/ The 18th International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Reseach (Motor’2019; Ekaterinburg). Ekaterinburg, 2019. 11548. P. 449–460.

Дыхта Владимир Александрович

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН), Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: dykhta@gmail.com



## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОМ И ГРАНИЧНОМ ВЕКТОРНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

© 2023 г. А. К. КЕРИМБЕКОВ, Э. Ф. АБДЫЛДАЕВА

**Аннотация.** Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма при распределенном и граничном векторных управлениях. Установлено, что искомые оптимальные управления определяются как решения системы нелинейных интегральных уравнений специфического вида, которые обладают свойством равных отношений. Найдены достаточные условия существования единственного решения этой системы и разработан алгоритм построения оптимальных управлений и полного решения задачи нелинейной оптимизации.

**Ключевые слова:** задача нелинейной оптимизации, интегро-дифференциальные уравнения, система нелинейных интегральных уравнений, выпуклые функции, свойство равных отношений.

**AMS Subject Classification:** 49K20

**1. Введение.** Разработка методов решения задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами в случаях, когда уравнение содержит интегральный оператор Фредгольма или Вольтерра является одной из актуальных проблем нелинейной теории управления. В данной статье эта проблема рассматривается на примере решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма и происходящих под воздействием распределенного и граничного векторных управлений. Здесь изложены результаты, которые являются продолжением исследований работы [1]. Показано, что наличие распределенного векторного управления, согласно новым условиям оптимальности компонентов векторных уравнений приводят к необычной, нестандартной системе нелинейных интегральных уравнений, которая обладает свойством равных отношений. Применяя теорему о неявных функциях [3] и введением новых функций, которые определяются как на границе, так и внутри области, нестандартная система преобразована к нелинейному интегральному уравнению стандартного вида с одной неизвестной функцией. Установлены достаточные условия существования единственного решения нелинейного интегрального уравнения. Разработан алгоритм построения компонентов распределенного и граничного векторных оптимальных управлений и полного решения рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации.

**2. Постановка задачи нелинейной оптимизации.** Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J[\bar{u}(t, x), \bar{v}(t, x)] &= \\ &= \|V(T, x) - \xi_1(x)\|_{H(Q)}^2 + \|V_t(T, x) - \xi_2(x)\|_{H(Q)}^2 \\ &+ \alpha \|h[t, x, \bar{u}(t, x)]\|_{H(Q_T)}^2 + \beta \|b[t, x, \bar{v}(t, x)]\|_{H(\gamma_T)}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$\alpha, \beta > 0$ ,

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} - AV = \lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, \bar{u}(t, x)], x \in Q \in R^n, 0 < t < T, \quad (2)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), V_t(0, x) = \psi_2(x), x \in Q \in R^n, \quad (3)$$

$$\Gamma V(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x) \cos(\delta, x_i) + a(x) V(t, x) = p[t, x, \bar{\vartheta}(t, x)], x \in \gamma, 0 < t < T, \quad (4)$$

где функция  $V(t, x)$  в области  $Q$  описывает состояния управляемого колебательного процесса,  $Q$  – область  $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$  ограниченная кусочно-гладкой границей  $\gamma$ ,  $\delta$  – вектор нормали исходящая из точки  $x \in \gamma$ ;

$$AV(t, x) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) V_{x_j})_{x_i} - c(x) V(t, x), a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$$

эллиптический оператор;  $a(x) \geq 0, c(x) \geq 0$  – известные измеримые функции; ядро интегрального оператора Фредгольма функция  $K(t, \tau)$  определена в области  $0 \leq t, \tau \leq T$  и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty; \quad (5)$$

заданные функции  $\xi_1(x) \in H(Q), \xi_2(x) \in H(Q), \psi_2(x) \in H(Q)$  являются элементами гильбертова пространства квадратично суммируемых функций  $H(Q)$ , а функция  $\psi_1(x) \in H_1(Q)$  является элементом соболевского пространства первого порядка  $H_1(Q)$ ; Скалярная функция  $f[t, x, \bar{u}(t, x)] \equiv f[t, x, u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)] \in H(Q_T)$ ,  $Q_T = Q \times (0, T)$  и  $p[t, x, \bar{v}(t, x)] = p[t, x, v_1(t, x), \dots, v_n(t, x)] \in H(\gamma_T), \gamma_T = \gamma \times (0, T)$  описывают действия внешних и граничных источников и являются нелинейными функциями соответственно от управлений  $u_i(t, x) \in H(Q_T), i = 1, 2, 3, \dots, m$  и  $v_i(t, x) \in H(\gamma_T), i = 1, 2, 3, \dots, r$ ,  $\lambda$  – параметр,  $T$  – фиксированный момент времени;  $\|\cdot\|_X$  – норма элемента функционального пространства  $X$ .

**3. Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений.** Исследование проводится с использованием понятия обобщенного решения [ [2] ] краевой задачи (1)–(5). Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами получены условия оптимальности в виде систем равенств

$$\begin{aligned} \alpha \frac{h[t, x, \bar{u}(t, x)] h_{u_1}[t, x, \bar{u}(t, x)]}{f_{u_1}[t, x, \bar{u}(t, x)]} &= \dots = \alpha \frac{h[t, x, \bar{u}(t, x)] h_{u_m}[t, x, \bar{u}(t, x)]}{f_{u_m}[t, x, \bar{u}(t, x)]} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(T-t, \lambda) [-hn + \int_0^T G_n(T-t, \lambda) (f_n(\tau, \bar{u}) + \rho_n(\tau, \bar{v})) d\tau] z_n(x), x \in Q, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \beta \frac{b[t, x, \bar{v}(t, x)] b_{v_1}[t, x, \bar{v}(t, x)]}{\rho_{v_1}[t, x, \bar{v}(t, x)]} &= \dots = \beta \frac{b[t, x, \bar{v}(t, x)] b_{v_r}[t, x, \bar{v}(t, x)]}{\rho_{v_r}[t, x, \bar{v}(t, x)]} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(T-t, \lambda) [-hn + \int_0^T G_n(T-t, \lambda) (f_n(\tau, \bar{u}) + \rho_n(\tau, \bar{v})) d\tau] z_n(x), x \in \gamma \end{aligned} \quad (7)$$

и неравенств определителей вида

$$\begin{aligned} (-1)^k \prod_{i=1}^k f_{u_i}(t, x, \bar{u}(t, x)) \left| \left( \frac{h((t, x, \bar{u}(t, x))) h_{u_i}((t, x, \bar{u}(t, x)))}{f_{u_i}((t, x, \bar{u}(t, x)))} \right)_{u_j} \right|_{i,j=1,2,3,\dots,k} &> 0, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m; x \in Q, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (-1)^l \prod_{i=1}^l \rho_{v_i}(t, x, \bar{v}(t, x)) \left| \left( \frac{b((t, x, \bar{v}(t, x))) b_{v_i}((t, x, \bar{v}(t, x)))}{\rho_{v_i}((t, x, \bar{v}(t, x)))} \right) \right|_{i,j=1,2,3,\dots,l} &> 0, \\ l &= 1, 2, 3, \dots, r; x \in \gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

Далее для пар функций  $\{h[t, x, \bar{u}(t, x)], f[t, x, \bar{u}(t, x)]\}$  и  $\{b[t, x, \bar{v}(t, x)], p[t, x, \bar{v}(t, x)]\}$  удовлетворяющих условиям (8) и (9) рассматривается система равенств (6) и (7). На основе свойств равных отношений имеем следующие равенства

$$\alpha \frac{h[t, x, \bar{u}(t, x)]h_{u_i}[t, x, \bar{u}(t, x)]}{f_{u_i}[t, x, \bar{u}(t, x)]} = \theta_1(t, x), x \in Q, i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (10)$$

$$\beta \frac{b[t, x, \bar{v}(t, x)]b_{v_i}[t, x, \bar{v}(t, x)]}{p_{v_i}[t, x, \bar{v}(t, x)]} = \theta_2(t, x), x \in \gamma, i = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (11)$$

из которых, в силу неравенств (8) и (9), находим, что

$$u_i[t, x] = \varphi_i[t, x, \theta_1(t, x), \alpha], i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (12)$$

$$v_i[t, x] = q_i[t, x, \theta_2(t, x), \beta], i = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (13)$$

где  $\varphi_i(\cdot)$  и  $q_i(\cdot)$  – известные функции. Соотношения (10)–(13) позволяют переписать систему равенств (6)–(7) в виде следующего нелинейного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \theta(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(T-t, \lambda) \{-hn + \int_0^T G_n(T-t, \lambda) [\int_Q f(\tau, \xi, \bar{\varphi}[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi), \alpha]) z_n(\xi) d\xi + \\ & + \int_{\gamma} p(\tau, \xi, \bar{q}[\tau, \xi, \theta(\tau, \xi), \beta]) z_n(\xi) d\xi] d\tau\} z_n(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\theta(t, x) = \begin{cases} \theta_1(t, x), x \in Q \\ \theta_2(t, x), x \in \gamma \end{cases}.$$

Установлены достаточные условия существования единственного решения уравнения (14). После определения функции  $\theta(t, x)$ , согласно формулам (12) и (13) находим компоненты искомых оптимальных векторных управлений  $\bar{u}^o(t, x)$  и  $\bar{v}^o(t, x)$ . Далее выписывается формула для оптимального процесса  $V^o(t, x)$  и вычисляется минимальное значение функционала. Разработан алгоритм построения приближений полного решения задачи нелинейной оптимизации и доказаны их сходимость по норме соответствующих функциональных пространств.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Керимбеков А. К., Абдылдаева Э. Ф. О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. 22. С. 163–176.
2. Керимбеков А. К., Абдылдаева Э. Ф. О разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. 27. С. 128–140.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М. : Наука, 1965. 304 с.

Керимбеков Акылбек Керимбекович

Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина, Бишкек, Кыргызская Республика

E-mail: ak17@rambler.ru

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна

Кыргызско-Турецкий университет Манас, Бишкек, Кыргызская Республика

E-mail: efa69@mail.ru





## ОБ ОДНОЙ НЕГЛАДКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2023 г. А. Ф. МАНСИМЗАДЕ, К. Б. МАНСИМОВ

Аннотация. Рассматривается одна задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая на различных отрезках времени различными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра с негладким критерием качества. Доказаны ряд необходимых условий оптимальности в терминах производных по направлениям.

**Ключевые слова:** производная по направлению, допустимое управление, терминальный функционал, необходимое условие оптимальности, функционал качества.

**AMS Subject Classification:** 49K15, 49K20

В работах [3, 4] и др. исследованы ряд задач оптимального управления ступенчатыми системами, описываемые дифференциальными уравнениями с достаточно гладким функционалом качества.

В предлагаемой работе рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Функционал качества является не дифференцируемым.

Доказаны необходимые условия оптимальности в терминах производных по направлениям. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$J(u_1, u_2) = \Phi_1((x_1(t_1))) + \Phi_2((x_2(t_2))),$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(t, x_i(t), u_i(t)) + \int_{t_{i-1}}^t K_i(t, x_i(\tau), u_i(\tau)) d\tau, i = 1, 2, \\ x_1(t_0) &= x_{10}, \\ x_2(t_1) &= G(x_1(t_1)), \\ u_1(t) &\in U_1 \subset R^r, t \in T, \\ u_2(t) &\in U_2 \subset R^q, t \in T, \end{aligned}$$

Здесь  $u_1(t)(u_2(t))$  – кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода)  $r(q)$ -мерная, вектор-функция управляющих воздействий,  $x_{10}$  – заданный  $n$ -мерный постоянный вектор,  $f_1(t, x_1(t), u_1(t)), K_1(t, \tau, x_1, u_1)(f_2(t, x_2(t), u_2(t)), K_2(t, \tau, x_2, u_2))$  – заданные  $n$ -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по  $x_1(x_2), G(x_1)$  – заданная, непрерывно-дифференцируемая  $n$ -мерная вектор-функция,  $\Phi_i(x_i), i = 1, 2$  – заданные скалярные функции, имеющие производные по любому направлению и удовлетворяющие условию Липшица.

Пару  $(u_1(t), u_2(t))$  с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Пусть  $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$  – некоторый допустимый процесс. Через  $F_i(t, \tau), i = 1, 2$  – обозначим  $(n \times n)$  матричные функции, являющиеся решениями матричных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F_i(t, \tau)}{\partial t} = -F_i(t, \tau) \frac{\partial f_i(\tau, x_i(\tau), u_i(\tau))}{\partial x_i} + \int_{\tau}^t F_i(t, \tau) \frac{\partial K_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_i} ds, i = 1, 2$$

$$F_i(t, t) = E, i = 1, 2.$$

( $E - (n \times n)$ -единичная матрица)

Введем обозначения

$$\begin{aligned} l_1(\theta, v_1) &= F_1(t_1, \theta)(f_1(\theta, x_1(\theta), v_1) - f_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta))) + \\ &+ \int_{\tau}^{t_1} F_1(t_1, \tau)(K_1(\tau, \theta, x_1(\theta), v_1) - K_1(\tau, \theta, x_1(\theta), u_1(\theta)))d\tau, \\ l_2(\theta, v_2) &= F_2(t_2, t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} l_1(\theta, v_1), \\ q(\theta, v_2) &= F_2(t_2, \theta)(f_2(\theta, x_2(\theta), v_2) - f_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta))) + \\ &+ \int_{\theta}^{t_2} F_2(t_2, \tau)(K_2(\tau, \theta, x_2(\theta), v_2) - K_2(\tau, \theta, x_2(\theta), u_2(\theta)))d\tau. \end{aligned}$$

Доказана

**Теорема 1.** При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\frac{\partial \Phi_1((x_1(t_1)))}{\partial l_1(\theta, v_1)} + \frac{\partial \Phi_2((x_2(t_2)))}{\partial l_2(\theta, v_2)} \geq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi_2((x_2(t_2)))}{\partial q(\theta, v_2)} \geq 0 \quad (2)$$

выполнялись для всех  $\theta \in [t_0, t_1], v_1 \in U_1, \theta \in [t_1, t_2], v_2 \in U_2$  соответственно.

Неравенства (1) и (2) являются довольно общими необходимыми условиями оптимальности, а рассматриваемая задача охватывает также задачу на минимакс [1, 2].

В работе рассмотрен также случай выпуклых областей управления.

Доказаны линеаризованные необходимые условия оптимальности.

Пусть вектор-функции  $f_i(t, x_i, u_i), K_i(t, \tau, x_i, u_i), i = 1, 2$  имеют непрерывные частные производные также и по  $u_i, i = 1, 2$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} c_1(v_1(t)) &= \int_{t_0}^{t_1} F_1(t_1, \tau) \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial u_1} (v_1(t) - u_1(t))dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\tau}^t F_1(t_1, \tau) \frac{\partial K_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t))}{\partial u_1} (v_1(t) - u_1(t))d\tau \right] dt, \\ c_2(v_1(t)) &= \int_{t_0}^{t_1} F_2(t_2, t_1) \frac{\partial G_1(x_1(t))}{\partial x_1} c_1(v_1(t_1)), \\ d(v_2(t)) &= \int_{t_0}^{t_1} F_2(t_2, \tau) \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial u_2} (v_2(t) - u_2(t))dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\tau}^t F_2(t_2, \tau) \frac{\partial K_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t))}{\partial u_2} (v_2(t) - u_2(t))d\tau \right] dt. \end{aligned}$$

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть множества  $U_i, i = 1, 2$  - выпуклы, а  $f_i(t, x_i, u_i), K_i(t, \tau, x_i, u_i), i = 1, 2$  имеют непрерывные частные производные также и по  $u_i, i = 1, 2$ . Тогда для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\frac{\partial \Phi_1((x_1(t_1)))}{\partial c_1(v_1(t))} + \frac{\partial \Phi_2((x_2(t_2)))}{\partial c_2(v_1(t))} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2((x_2(t_2)))}{\partial d(v_2(t))} \geq 0$$

выполнялись для всех допустимых управлений  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  соответственно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М. : Либроком, 2011. 271 с.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление, 1990. 432 с.
3. Захаров Г. К. Оптимизация ступенчатых систем управления // Автоматика и телемеханика. 1981. 8. С. 3–9.
4. Исмаилов Р. Р., Мансимов К. Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. 10. С. 1758–1770.

Мансимзаде Айгюль Фазил кызы  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан  
 E-mail: aygulmansimzade@gmail.com

Мансимов Камил Байрамали оглы  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан  
 Институт систем управления НАН Азербайджана  
 E-mail: kamilbmansimov@gmail.com



НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В  
ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ,  
ОПИСЫВАЕМОЙ ДВУМЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА – ДАРБУ С  
МНОГОТОЧЕЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

© 2023 г. К. Б. МАНСИМОВ, Ш. Ш. СУЛЕЙМАНОВА

Аннотация. Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая в двух различных областях двумя системами гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса – Дарбу. Установлены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

**Ключевые слова:** разностное уравнение типа Вольтерра, система Гурса-Дарбу, многоточечный функционал, аналог линеаризованного условия максимума Л. С. Понтрягина.

**AMS Subject Classification:** 49 K15, 49K20

Исследование задач оптимального управления, описываемые гиперболическими уравнениями второго порядка с краевыми условиями Гурса – Дарбу, началось с работы [2] А.И. Егорова.

В дальнейшем ряд задач оптимального управления описываемые краевыми задачами Гурса – Дарбу были исследованы в работах К.Т. Ахмедова и С.С. Ахиева, В.И. Плотникова и В.И. Сумина, О.В. Васильева, О.В. Васильева и Л.Т. Ащепкова, В.А. Срочко, В.А. Дыхты и Е.П. Бокмельдер, К.Б. Мансимова, Т.К. Меликова и др. Обзор соответствующих работ имеются, например в [1, 3–6].

В предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая двумя системами гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. Установлены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

Пусть  $U_1 \in R^r, U_2 \in R^q$  – заданные непустые и ограниченные множества,  $D_i = [t_i - 1, t_i] \times [x_0, x_1], i = 1, 2$  – заданные прямоугольники,  $D_i = [t_i - 1, t_i] \times [x_0, x_1], i = 1, 2$  – заданные прямоугольники,  $(T_i, X_i) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], i = \overline{1, k}, (t_0 < T_1 < \dots < T_k < t_1, x_0 < X_1 < \dots < X_k < x_1), i = \overline{1, k}, (\theta_i, \xi_i) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1] (\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_k < \theta_1, \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k < \xi_1)$  – заданные точки. Рассмотрим задачу о минимуме многоточечного функционала

$$S(u_1, u_2) = \varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2) \dots z(T_k, X_k)) + \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2) \dots y(\theta_k, \xi_x)),$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} z_{t,x} &= f_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1), (t, x) \in D_1 \\ z(t_0, x) &= a(x), x \in [x_0, x_1], \\ z(t, x_0) &= b_1(t), t \in [t_0, t_1], \\ y_{t,x} &= f_2(t, x, y, y_t, y_x, u_2), (t, x) \in D_2 \\ y(t_1, x) &= z(t_1, x), x \in [x_0, x_1], \\ y(t, x_0) &= b_2(t), t \in [t_1, t_2], \\ u_1(t, x) &\in U_1 \subset R^r, (t, x) \in D_1 \\ u_2(t, x) &\in U_2 \subset R^q, (t, x) \in D_2 \end{aligned}$$

Здесь  $a(x), b_i(t), i = 1, 2$  – заданные  $n$ -мерные абсолютно-непрерывные вектор-функции,  $\varphi_1(z_1 \dots z_k), \varphi_2(y_1 \dots y_k)$  – заданные скалярные функции, имеющие непрерывные частные производные по совокупности переменных,  $f_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1), f_2(t, x, y, y_t, y_x, u_2)$  – заданные,  $n$ -мерные

вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(z, z_t, z_x), (y, y_t, y_x)$  соответственно,  $u_1(t, x)(u_2(t, x)) - r(q)$ -мерная измеримая и ограниченная управляющая вектор-функция.

Пару  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  соответствует единственное абсолютно непрерывное решение  $(z(t, x), y(t, x))$  краевой задачи (2)–(?). Считая  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  некоторым допустимым управлением, через  $\alpha_i(t, x)$  обозначим характеристическую функцию прямоугольника  $[t_0, \tau_i] \times [x_0, X_i]$ .

Пусть  $\beta_i(t, x)$  характеристическая функции прямоугольника  $[t_0, \theta_i] \times [x_0, \xi_i]$ , а  $\gamma_i(x)$  характеристическая функция отрезка  $[x_0, \xi_i]$ . Введем аналоги функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1, \psi_1) = \psi'_1 H_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1),$$

$$H_2(t, x, z, z_t, z_x, u_2, \psi_2) = \psi'_2 H_2(t, x, z, z_t, z_x, u_2).$$

Здесь  $\psi_i(t, x), i = 1, 2 - n$ -мерные вектор-функции, являющихся решениями интегральных уравнений Вольтерра с двумерными слагаемыми

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) = & - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t, x) \frac{\partial \varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2) \dots z(T_k, X_k))}{\partial z_i} + \\ & + \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \frac{\partial H_1(\tau, s, p_1(\tau, s), u_1(\tau, s), \psi_1(\tau, s))}{\partial z} ds d\tau + \\ & + \int_x^{x_1} \frac{\partial H_1(t, s, p_1(t, s), u_1(t, s), \psi_1(t, s))}{\partial z_t} ds + \\ & + \int_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\tau, x, p_1(\tau, x), u_1(\tau, x), \psi_1(\tau, x))}{\partial z_x} d\tau - \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) \frac{\partial \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), z y(\theta_2, \xi_2) \dots y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} + \\ & + \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \frac{\partial H_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s), \psi_2(\tau, s))}{\partial y} ds d\tau + \int_t^{t_1} \frac{\partial H_2(\tau, x, p_2(\tau, x), u_2(\tau, x), \psi_2(\tau, x))}{\partial y_x} d\tau. \\ \psi_2(t, x) = & - \sum_{i=1}^k \beta_i(t, x) \frac{\partial \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), z(\theta_2, \xi_2) \dots z(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} + \\ & + \int_t^{t_2} \int_x^{x_2} \frac{\partial H_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s), \psi_2(\tau, s))}{\partial y} ds d\tau + \int_x^{x_1} \frac{\partial H_2(t, s, p_2(t, s), u_2(t, s), \psi_2(t, s))}{\partial y_t} ds + \\ & + \int_t^{t_1} \frac{\partial H_2(\tau, x, p_2(\tau, x), u_2(\tau, x), \psi_2(\tau, x))}{\partial y_x} d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

в классе измеримых и ограниченных вектор-функций.

Пусть  $P_1(z, z_t, z_x)P_2(z, z_t, z_x)$ . Учитывая соотношения (1) и (2) доказана формула приращения функционала качества соответствующее допустимым управлениям  $(u_1(t, x), u_2(t, x))(u_1(t, x) = u_1(t, x) + \Delta u_1(t, x), u_2(t, x) = u_2(t, x) + \Delta u_2(t, x))$ .

$$\begin{aligned} S(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - S(r u_1, u_2) = & - \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \Delta_{\bar{u}_1(t, x)} H_1(t, x, p_1(t, x), u_1(t, x), \psi_1(t, x)) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1(t, x)} H_1(t, x, p_1(t, x), u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial p_1} \Delta p_1(t, x) dx dt - \\ & - \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \Delta_{\bar{u}_2(t, x)} H_2(t, x, p_2(t, x), u_2(t, x), \psi_2(t, x)) dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2(t, x)} H_2(t, x, p_2(t, x), u_2(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial p_1} \Delta p_2(t, x) dx dt + \end{aligned}$$

$$+ o_1 \left( \sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + o_2 \left( \sum_{i=1}^k \|\Delta z(\theta_i, \xi_i)\| \right) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|p_1(t, x)\|) dx dt. \quad (3)$$

С помощью формулы приращения (3) доказана

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\max_{v_1 \in U_1} H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi)) = H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi))$$

для всех  $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ ,

$$\max_{v_2 \in U_2} H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi)) = H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi))$$

для всех  $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$ , выполнялись для всех допустимых управлений  $v_i(t), i = 1, 2$  соответственно.

Далее рассмотрен случай выпуклых областей управления и доказана теорема в виде линеаризованного интегрального принципа максимума.

**Теорема 2.** Пусть

1) множества  $U_i, i = 1, 2$  – выпуклы;

2) вектор-функции  $f_i(t, x, p_i, u_i), i = 1, 2$  – имеют непрерывные частные производные по  $(p_i, u_i), i = 1, 2$  соответственно.

Тогда для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t, x), u_2(t, x))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_1'(t, x, p_1(t, x), u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1} [v_1(t, x) - u_1(t, x)] dx dt \leq 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2'(t, x, p_2(t, x), u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2} [v_2(t, x) - u_2(t, x)] dx dt \leq 0$$

выполнялись для всех допустимых управляющих функций  $v_1(t, x)$  и  $v_2(t, x)$  соответственно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск : Наука, 1990. 151 с.
2. Егоров А. И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматики и телемеханика. 1964. 5. С. 613–623.
3. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Введение в теорию оптимального управления с распределенными параметрами. М. : Лань, 2017. 292 с.
4. Мансимов К. Б., Марданов М. Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку : Изд-во Элм, 2010. 362 с.
5. Меликов Т. К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса – Дарбу. Баку : ЭЛМ, 2013. 96 с.
6. Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск : Изд-во ИГУ, 1989. 151 с.

Мансимов Камил Байрамали оглы

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,

Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики (ИСУ МНОАР)

E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Сулейманова Шабнам Шакир гызы.

Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики (ИСУ МНОАР)

E-mail: kmansimov@mail.ru



## ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© 2023 г. К. Б. МАНСИМОВ, А. В. КЕРИМОВА

**Аннотация.** Рассматривается ступенчатая (двухэтапная) задача оптимального управления, описываемая двумя системами разностных уравнений типа Вольтерра. Доказано необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

**Ключевые слова:** разностное уравнение типа Вольтерра, допустимое управление, аналог дискретного принципа максимума, необходимое условие оптимальности.

**AMS Subject Classification:** 49 K15, 49K20

Многие процессы, являясь сложными, носят многоэтапный характер.

Задачи оптимального управления такими процессами называются ступенчатыми задачами оптимального управления (см., например, [1–4]).

В предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная дискретная ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системами разностных уравнений типа Вольтерра.

Доказано необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Пусть  $f_i(t, x_i, u_i)$ ,  $K_i(t, \tau, x_i, u_i)$ ,  $i = 1, 2$  – заданные  $n$ -мерные вектор-функции, дискретные по  $t(t, \tau)$  и непрерывные по  $(x_i, u_i)$  вместе с частными производными по  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  до второго порядка включительно,  $\Phi_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2$  – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции,  $F_i(t, \tau, x_i, u_i)$ ,  $i = 1, 2$  – заданные скалярные функции, дискретные по  $(t, \tau)$  и непрерывные по  $(x_i, u_i)$  вместе с частными производными по  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  до второго порядка включительно,  $U_1 \in R^r$ ,  $U_2 \in R^q$  – заданные непустые, ограниченные множества,  $(u_1(t), u_2(t))$  –  $r(q)$ -мерный дискретный, вектор управляющих воздействий,  $T_1 = \{t_0, t_0 + 1 \dots t_1 - 1\}$  и  $T_2 = \{t_1, t_1 + 1 \dots t_2 - 1\}$  заданные конечные последовательности.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$J(u_1, u_2) = \varphi_1((x_1(t_1))) + \varphi_2((x_2(t_2))) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_0}^t F_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) \right] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[ \sum_{\tau=t_1}^t F_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) \right] \quad (1)$$

при ограничениях

$$u_1(t) \in U \subset R^r, t \in T_1, u_2(t) \in U \subset R^q, t \in T_2,$$

$$x_i(t+1) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)) + \sum_{\tau=t_i-1}^t K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau)), t \in T_i, i = 1, 2, \\ x_1(t_0) = x_{10}, \\ x_2(t_1) = G(x_1(t_1)).$$

Здесь  $x_{10}$  – заданный  $n$ -мерный постоянный вектор,  $G(x_1)$  – заданная, дважды непрерывно-дифференцируемая  $n$ -мерная вектор-функция. Пару  $(u_1(t), u_2(t))$  с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Считая  $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$  некоторым допустимым процессом, введем обозначения

$$\begin{aligned} H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) &= \psi_i'(t) f_i(t, x_i(t), u_i(t)) + \\ &+ \sum_{\tau=t}^{t_i} [\psi_i'(\tau) K_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t)) - F_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t))], \quad i = 1, 2, \\ M(\psi_2(t_1 - 1, x(t_1))) &= \psi_2'(t_1 - 1) G(x_1(t_1)). \end{aligned}$$

Здесь  $\psi_2(t), i = 1, 2$  –  $n$ -мерные вектор-функции, являющиеся решениями задач

$$\begin{aligned} \psi_i(t - 1) &= \frac{\partial H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \\ \psi_1(t_1 - 1) &= \frac{\partial \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial M(\varphi_2(x_1(t_1)), x_1(t_1))}{\partial x_1}, \\ \psi_2(t_2) &= -\frac{\partial \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

(сопряженная задача).

Предположим, что множества

$$f_i(t, x_i(t), U_i) = \{\alpha_i : \alpha_i := f_i(t, x_i(t), u_i(t)), u_i(t) \in U_i, t \in T_i\}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$F_i(t, \tau, x_i(\tau), U_i) = \{\beta_i : \beta_i := F_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau)), u_i(\tau) \in U_i, t \in T_i\}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$K_i(t, \tau, x_i(\tau), U_i) = \{\gamma_i : \gamma_i := K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau)), u_i(\tau) \in U_i, t \in T_i\}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

выпуклы при всех  $t$  и  $(t, \tau)$  соответственно.

Учитывая сопряженную систему, приращение функционала качества (1), соответствующее допустимым управлениям  $(u_1(t), u_2(t))$  и  $\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t)$  представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}_1(t)} H_1[t, \psi_1] - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \Delta_{\bar{u}_2(t)} H_2[t, \psi_2] + \\ &+ \Delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) - \frac{1}{2} x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1)), x_1(t_1)}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) - \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1(t)} H_1[t, \psi_1]}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x_2'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \Delta x_2(t_2) - \\ &+ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2(t)} H_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t_2) - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1[t, \psi_1]}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x_2'(t) \frac{\partial^2 H_2[t, \psi_1]}{\partial x_2^2} \Delta x_2(t) + \eta(\Delta u_1(t), \Delta u_2(t)). \end{aligned}$$

Здесь  $\eta(\Delta u_1(t), \Delta u_2(t))$  остаток формулы приращения, имеющий на специальных вариациях управления более высокий порядок малости, чем остальные слагаемые, а

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}_i(t)} H_i[t, \psi_i], \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_i(t)} H_i[t, \psi_i]}{\partial x_i} \Delta x_i(t_i) \\ \Delta_{\bar{u}_i(t)} H_i[t, \psi_i] = H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)), \\ \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_i(t)} H_i[t, \psi_i]}{\partial x_i} = \frac{\partial H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} - \frac{\partial H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Имеет место



**Теорема 1.** Если множества (2)–(4) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{v}_1(t)} H_1[t, \psi_1] \leq 0, \quad \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \Delta_{\bar{v}_2(t)} H_2[t, \psi_2] \leq 0, \quad (5)$$

выполнялись для всех допустимых управлений  $v_i(t), i = 1, 2$  соответственно.

Далее рассмотрен случай вырождения аналога дискретного принципа максимума.

Определение: Если при всех  $v_i(t) \in U_i, t \in T_i, i = 1, 2$  выполняются соответственно, соотношения

$$\sum_{t=t_i-1}^{t_i} \Delta_{\bar{v}_i(t)} H_i[t, \psi_i] = 0,$$

то допустимое управление  $(u_1(t), u_2(t))$  назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением.

Пусть  $(u_1(t), u_2(t))$  особое управление.

Через  $l'_i(t, v_i), i = 1, 2, q(t, v_2)$  обозначим решение следующих задач

$$\begin{aligned} l_1(t+1, v_1) &= \frac{\partial f'_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial x_1} l_1(t, v_1) + \Delta_{v_1(t)} f_1[t] + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^t \frac{\partial K_1(\tau, t, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} l_1(\tau, v_1), \\ l_1(t_0, v_1) &= 0, \\ l_2(t+1, v_2) &= \frac{\partial f'_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} l_2(t, v_2) + \Delta_{v_2(t)} f_2[t] + \\ &+ \sum_{\tau=t_1}^t \frac{\partial K_2(\tau, t, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} l_2(\tau, v_2), \\ l_2(t_1, v_2) &= 0, \\ q(t+1, v_2) &= \frac{\partial f'_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} q(t, v_2) + \sum_{\tau=t_1}^t \frac{\partial K_2(\tau, t, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} q(\tau, v_2), \\ q(t_1, v_2) &= \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} q(t_1, v_1). \end{aligned}$$

Доказана

**Теорема 2.** Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} l'_1(t_1, v_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} l_1(t_1, v_1) - l'_1(t_1, v_1) + q'_1(t_2, v_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} q(t_2, v_1) - \\ - q'_1(t_1, v_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1-1), (x_1(t_1)))}{\partial x_1^2} l_1(t_1, v_1) - \\ - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial \Delta_{\bar{v}_1(t)} H_1[t, \psi_1]}{\partial x_1} l_1(t, v_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} l'_1(t, v_1) \frac{\partial^2 H_1[t, \psi_1]}{\partial x_1^2} l_1(t, v_1) - \\ - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q'(t, v_1) \frac{\partial^2 H_2[t, \psi_2]}{\partial x_2^2} l_1(t, v_1) \geq 0, \\ l'_2(t_2, v_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} l_2(t_2, v_2) - 2 \sum_{t=t_1-1}^{t_2} \frac{\partial^2 \Delta_{\bar{v}_2(t)} H_2[t, \psi_1]}{\partial x_2^2} l_2(t, v_2) - \end{aligned}$$

$$- \sum_{t=t_1-1}^{t_2} l'_2(t, v_1) \frac{\partial^2 H_2[t, \psi_1]}{\partial x_2^2} l_2(t, v_2) \geq 0$$

выполнялись для всех допустимых управлений  $v_i(t), i = 1, 2$  соответственно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М : Либроком, 2011. 256 с.
2. Исмаилов Р. Р., Мансимов К. Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. 10. С. 1758–1770.
3. Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом. // Вестник РУДН. Серия: Прикладная математика и компьютерная математика. 2002. 10. С. 131–136.
4. Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами. // Автоматика и телемеханика. 1972. 3. С. 15–23.

Мансимов Камил Байрамали оглы  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,  
 Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской  
 Республики (ИСУ МНОАР)  
 E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Керимова Айтадж Вагиф кызы  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан  
 E-mail: kmansimov@mail.ru



## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. К. Б. МАНСИМОВ, К. М. АЛИЕВ

**Аннотация.** Исследуется задача оптимального управления описываемая системой нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями при предложении открытой области управления.

Доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, в частности аналог условия Лежандра – Клебша. Исследован случай особых в классическом смысле управлений.

**Ключевые слова:** нагруженного дифференциального уравнения, аналог уравнение Эйлера, вариация функционала, многоточечный функционал.

**AMS Subject Classification:** 49K15, 49K20

В работах [1–3] и др. изучены ряд задач оптимального управления описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с нелокальными краевыми условиями.

Доказан необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и исследован случай его вырождения.

В работе [5] получены ряд необходимых условий оптимальности для некоторых классов задач оптимального управления описываемые системой нагруженными дифференциальными уравнениями с довольно общими краевыми условиями.

В предлагаемой работе рассматривается одна задача оптимального управления нагруженным дифференциальным уравнением с нелокальными краевыми условиями при предложении открытости области управления.

Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Пусть управляемый процесс на фиксированном отрезке времени  $[t_0, t_1]$  описывается системой нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t_0), x(t_1)), t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с линейными нелокальными краевыми условиями

$$B_0 x(t_0) + B_1 x(t_1) = l. \quad (2)$$

Здесь  $f(t, x, a, b, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(x, a, b, u)$  до второго порядка включительно,  $B_i, i = 0, 1$  – заданные  $n \times n$  постоянные матрицы,  $l$  – заданный  $n$ -мерный постоянный вектор,  $u(t)$  –  $r$ -мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих функций со значениями из заданного, непустого и ограниченного множества  $U$ , т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T = [t_0, t_1].$$

Также управляющие функции назовем допустимыми управлениями. Предполагается, что каждому допустимому управлению  $u(t)$  соответствует единственное абсолютное непрерывное решение  $x(t)$  краевой задачи (1)–(2). Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x(t_0), x(t_1), u(t)) dt \quad (3)$$

определенного на решениях краевой задачи (1)–(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями. Здесь  $\varphi(a, b)$  – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция,  $F(t, x, , b, u)$  – заданная скалярная функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(x, a, b, u)$  до второго порядка включительно. Пусть  $(x(t), u(t))$  – некоторый допустимый процесс,  $\psi(t)$  и  $\lambda \in R^n$  – вектор-функция и постоянный вектор соответственно, а

$$H(t, x, a, b, u, \psi) = \psi' f(t, x, a, b, u)$$

аналог функции Гамильтона-Понтрягина. Введем обозначения

$$\begin{aligned} H_x[t, \psi] &= H_x(t, x, x(t_0), x(t_1), u(t), \psi(t)), \\ H_{xx}[t, \psi] &= H_{xx}(t, x, x(t_0), x(t_1), u(t), \psi(t)), \\ H_u[t, \psi] &= H_u(t, x, x(t_0), x(t_1), u(t), \psi(t)), \\ H_{uu}[t, \psi] &= H_{uu}(t, x, x(t_0), x(t_1), u(t), \psi(t)). \end{aligned}$$

Предположим, что вектор-функция  $\psi(t)$  и  $\lambda$  удовлетворяет соотношением

$$\psi(t) = \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial b} + \int_t^{t_1} \frac{\partial H[\tau, \psi]}{\partial x} d\tau + \int_t^{t_1} \frac{\partial H[\tau, \psi]}{\partial b} d\tau - B_1' \lambda \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B_1' \lambda + B_0' \lambda - \int_t^{t_1} \frac{\partial H[\tau, \psi]}{\partial b} dt + \int_t^{t_1} \frac{\partial H[\tau, \psi]}{\partial b} dt + \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial a} + \\ + \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial b} + \int_t^{t_1} \frac{\partial H[\tau, \psi]}{\partial x} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу открытости области управления  $u(t)$  специальное приращение допустимого управления  $u(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta u(t), t \in [t_0, t_1]. \quad (6)$$

Здесь  $\delta u(t) \in R^r$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  произвольная, измеримая и ограниченная вектор-функция, а  $\varepsilon$  произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число. Используя формулу (6) и учитывая (4) и (5), при некоторых предположениях доказано, что первая и вторая вариации функционала (3) имеют соответственно следующий вид

$$\delta^1 S(u, \delta u) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} u(t) dt \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 S(u, \delta u) &= 2\delta x'(t_0) \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} \delta x(t_1) + \delta x'(t_0) \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} \delta x(t_0) + \\ &\quad \delta x'(t_1) \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} \delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta x'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial x^2} \delta x(t) + \right. \\ &\quad + 2\delta x'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial x \partial a} \delta x(t_0) + 2\delta x'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial x \partial b} \delta x(t_1) + \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial a^2} \delta x(t_0) + \\ &\quad + \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial b^2} \delta x(t_1) + 2\delta x'(t_0) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial a \partial b} \delta x(t_1) + 2\delta u'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial u \partial x} \delta x(t) + \\ &\quad \left. + \delta u'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial u \partial a} \delta x(t_0) + 2\delta u'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial u \partial b} \delta x(t_1) + 2\delta u'(t) \frac{\partial^2 H[\tau, \psi]}{\partial^2 u} \delta u(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\delta x(t)$  (вариации траектории) является решением краевой задачи

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f[t]}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f[t]}{\partial a} \delta x(t_0) + \frac{\partial f[t]}{\partial b} \delta x(t_1) + \frac{\partial f[t]}{\partial u} \delta u(t), \quad (9)$$

$$B_0 \delta x(t_0) + B_1 \delta x(t_1) = 0. \quad (10)$$

Используя краевую задачу (9)–(10), с помощью формул (7) и (8) доказаны аналог уравнения Эйлера и ряд необходимых условий оптимальности второго порядка.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмедов Ф. Ш.* К теории необходимых условий экстремума локальных и нелокальных задач оптимизации : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, 1986. 24 с.
2. *Васильев О. В., Терлецкий В. А.* Оптимальное управление краевой задачей // Труды МИАН. 1995. 211. С. 121–130.
3. *Васильева О. О., Мизулами К.* Оптимальное управление краевой задачей // Известия вузов. Математика. 1994. 12. С. 33–41.
4. *Васильева О. О.* Оптимизация динамических систем краевыми условиями : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Б.м., 1997.
5. *Vasileva O. O., Muzikami K.* Optimality for singular controllers linear boundary conditions // Math. analyze and appl. 1997. 2. С. 620–641.

Мансимов Камил Байрамали оглы

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,

Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики (ИСУ МНОАР)

E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Алиев Камран Мамедали оглы

Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики (ИСУ МН и ОА)

E-mail: kamilbmansimov@gmail.com



## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2023 г. М. ДЖ. МАРДАНОВ, Г. Ф. ГУЛИЕВ, Х. Т. ТАГИЕВ

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления для неустойчивого гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным граничным условием, доказывается теорема существования оптимальной пары и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

**Ключевые слова:** неустойчивое гиперболическое уравнение, нелокальное граничное условие, оптимальная пара, необходимое условие.

**AMS Subject Classification:** 49J20

В последнее время нелокальные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными интенсивно изучаются [3]. Это связано с тем, что существуют такие процессы, в которых непосредственно измерять значения некоторых величин наталкиваются на трудности. Поэтому измеряются их средние значения и естественно появляются такие граничные условия, что они связывают значения величин на границе и внутри рассматриваемой области.

Кроме этого, если в уравнении присутствует нелинейное слагаемое, тогда при изучении разрешимости краевых задач появляются дополнительные трудности. Отметим, что в задачах управления гибкими структурами, управления переносом электроэнергии и управления формой плазмы, уравнения состояния представляют особенности, а именно, явление разрыва, неустойчивости и т.д.

В таких системах заданному управлению может вообще не соответствовать какое-либо состояние, либо таких состояний будет бесконечно много, либо состояние будет единственным, но не устойчивым. Поэтому исследование задач оптимального управления в таких процессах представляет научный и практический интерес [4, 5].

Исходя из вышеизложенного, в представленном докладе рассматривается задача оптимального управления для неустойчивого гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным граничным условием, доказывается теорема существования оптимальной пары и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Рассмотрим в открытом множестве  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \subset R^n$ ,  $n = 2$  или  $3$ , пары  $(\vartheta, u)$ , где  $\vartheta$  – управление,  $u$  – состояние, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - u^3 = \vartheta(x, t), (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u^0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u^1(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

и граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy, (x, t) \in S, \quad (3)$$

где  $S = \partial\Omega \times (0, T)$  – боковая поверхность  $Q$ ,  $\partial\Omega$  – регулярная граница области  $\Omega$ ,  $u^0 \in W_2^1(\Omega)$ ,  $u^1 \in L_2(\Omega)$ ,  $K(x, y) \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$  – заданные функции,  $\frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \in L_2(\Omega \times \Omega)$ ,  $K(x, y) = K(y, x)$ , причем  $\nu$  – внешняя нормаль к границе  $S$ .

**Определение.** Пару  $(\vartheta, u)$  назовем допустимой, если

$$\vartheta \in V \subset L_2(Q), \tag{4}$$

где  $V$  – замкнутое выпуклое множество,  $V \neq \emptyset$  и  $u \in L_6(Q)$  удовлетворяют (1)-(3).

Предположим, что множество допустимых пар не пусто, т.е.  $\{\vartheta, u\} \neq \emptyset$ .

Определяем функционал

$$I(\vartheta, u) = \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6 + \frac{N}{2} \|\vartheta\|_{L_2(Q)}^2, \tag{5}$$

где  $u_d \in L_6(Q)$  – заданная функция,  $N > 0$  – заданное число и рассматриваем задачу оптимального управления  $\inf I(\vartheta, u)$ , где  $(\vartheta, u)$  пробегает множество допустимых пар.

**Теорема 1.** Существуют оптимальные пары  $(\vartheta_0, u_0)$ , т.е.

$$I(\vartheta_0, u_0) = \inf I(\vartheta, u),$$

где пары  $(\vartheta, u)$  допустимы.

*Доказательство.* Пусть  $(\vartheta_k, u_k)$  – минимизирующая последовательность, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\vartheta_k, u_k) = \inf I(\vartheta, u), \tag{6}$$

где  $(\vartheta, u)$  – допустимые пары. Из определения  $I(\vartheta, u)$  следует, что

$$\|\vartheta_k\|_{L_2(Q)} + \|u_k\|_{L_6(Q)} \leq c.$$

Но тогда последовательность

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \Delta u_k = \vartheta_k + u_k^3 \in L_2(Q)$$

ограничена в  $L_2(Q)$ , поэтому из классических результатов [1] следует, что

$$\|u_k\|_{L_\infty(0, T, W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0, T, L_2(\Omega))} \leq c. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что

$$\|u_k\|_{L_\infty(0, T, L_6(\Omega))} \leq c$$

и

$$\{u_k\} \subset K \subset L_\lambda(Q)$$

для  $\lambda < 6$  при  $n = 3$  и для любого конечного  $\lambda$  при  $n = 2$  ( $K$  – относительно компактное множество). Значит, можно выбрать такую подпоследовательность, снова обозначив его как  $\{\vartheta_k, u_k\}$ , что будет иметь место:

$$\begin{aligned} \vartheta_k &\rightarrow \vartheta_0 \text{ в } L_2(Q) \text{ слабо,} \\ u_k &\rightarrow u_0 \text{ в } L_\infty(0, T, W_2^1(\Omega)) \text{ *слабо,} \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial t} \text{ в } L_\infty(0, T, L_2(\Omega)) \text{ *слабо,} \\ u_k &\rightarrow u_0 \text{ в } L_\lambda(Q) \text{ сильно и п.в. в } Q (\lambda < 6). \end{aligned}$$

Тогда, перейдя к пределу, получим, что  $(\vartheta_0, u_0)$  – допустимая пара и

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} I(\vartheta_k, u_k) \geq I(\vartheta_0, u_0).$$

Отсюда и из соотношения (6) следует, что  $(\vartheta_0, u_0)$  – оптимальная пара. Теорема 1 доказана.  $\square$

**Теорема 2.** При наложенных условиях на данные задачи (1)-(3),(4),(5) для оптимальности пары  $(\vartheta_0, u_0)$  необходимо существование такой функции  $\psi(x, t)$ , чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 - u_0^3 &= \vartheta_0 \quad \text{в } Q, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi - 3u_0^2 \psi - \int_{\partial \Omega} K(\xi, x) \psi(\xi, t) d\xi &= (u_0 - u_d)^5 \quad \text{в } Q, \\ u_0(x, 0) = u^0(x), \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} &= u^1(x), x \in \Omega, \psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \Big|_S &= \int_{\Omega} K(x, y) u_0(y, t) dy, (x, t) \in S, \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, (x, t) \in S, \end{aligned}$$

причем  $u \in L_{\infty}(0, T; W_2^1(\Omega))$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$ ,  $\psi \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_{\infty}(0, T; (W_2^1(\Omega))^*)$

$$\int_Q (\psi + N\vartheta_0)(\vartheta - \vartheta_0) dxdt \geq 0, \forall \vartheta \in V.$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы 2, следуя [2], введем адаптированный функционал к паре  $(\vartheta_0, u_0)$ :

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^a(\vartheta, u) &= \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6 + \frac{N}{2} \|\vartheta\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - u^3 - \vartheta \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|\vartheta - \vartheta_0\|_{L_2(Q)}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

для

$$\begin{aligned} \vartheta \in V, u \in L_6(Q), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &\in L_2(Q), \\ u(x, 0) = u^0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u^1(x), \end{aligned} \quad (9)$$

$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy$ ,  $(x, t) \in S$ ,  $\varepsilon > 0$  – параметр штрафа.

Как в теореме 1, можно доказать, что в задаче минимизации функционала (8) при ограничениях (9) существует оптимальная пара  $(\vartheta_{\varepsilon}, u_{\varepsilon})$ .

Далее выводится необходимое условие оптимальности. Запишем необходимые условия того, что  $(\vartheta_{\varepsilon}, u_{\varepsilon})$  является решение задачи

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^a(\vartheta_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) &= \inf I_{\varepsilon}^a(\vartheta, u) : \\ \frac{d}{d\lambda} I_{\varepsilon}^a(\vartheta_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} + \lambda\zeta) \Big|_{\lambda=0} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\forall \zeta \in C^2(\hat{Q}), \zeta(x, 0) = 0, \frac{\partial \zeta(x, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \Big|_S = \int_{\Omega} K(x, y) \zeta(y, t) dy, (x, t) \in S,$$

$$\frac{d}{d\lambda} I_{\varepsilon}^a(\vartheta_{\varepsilon} + \lambda(\vartheta - \vartheta_{\varepsilon}), u_{\varepsilon}) \Big|_{\lambda=0} \geq 0, \forall \vartheta \in V, \vartheta_{\varepsilon} \in V, \quad (11)$$

где производные в формулах (10), (11) понимаются в смысле Гато. Если вычислить производную из (10) и приравнять нулю, имеем

$$\begin{aligned} - \int_Q \psi_{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \Delta \zeta - 3u_{\varepsilon}^2 \zeta \right) dxdt + \int_Q (u_{\varepsilon} - u_d)^5 \zeta dxdt + \int_Q (u_{\varepsilon} - u_0) \zeta dxdt &= 0, \\ \forall \zeta \in C^2(\hat{Q}), \zeta(x, 0) = 0, \frac{\partial \zeta(x, 0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \Big|_S = \int_{\Omega} K(x, y) \zeta(y, t) dy, (x, t) \in S,$$

где

$$\psi_{\varepsilon}(x, t) = -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial t^2} - \Delta u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^3 - \vartheta_{\varepsilon} \right).$$

Тогда  $\psi_{\varepsilon}(x, t)$  будет слабым решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{\varepsilon}}{\partial t^2} - \Delta \psi_{\varepsilon} - 3u_{\varepsilon}^2 \psi_{\varepsilon} - \int_{\partial \Omega} K(\xi, x) \psi_{\varepsilon}(\xi, t) d\xi &= (u_{\varepsilon} - u_d)^5 + (u_{\varepsilon} - u_0), (x, t) \in Q, \\ \psi_{\varepsilon}(x, T) = 0, \frac{\partial \psi_{\varepsilon}(x, T)}{\partial t} &= 0, x \in \Omega, \frac{\partial \psi_{\varepsilon}}{\partial \nu} \Big|_S = 0, (x, t) \in S. \end{aligned}$$

А условие (11) дает

$$\int_Q (\psi_{\varepsilon} + N\vartheta_{\varepsilon})(\vartheta - \vartheta_{\varepsilon}) dxdt + \int_Q (\vartheta_{\varepsilon} - \vartheta_0)(\vartheta - \vartheta_{\varepsilon}) dxdt \geq 0, \forall \vartheta \in V. \quad (12)$$

Далее доказывается, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u_{\varepsilon} \rightarrow u_0$  сильно в  $L_6(Q)$  и  $\vartheta_{\varepsilon} \rightarrow \vartheta_0$  сильно в  $L_2(Q)$ , а предельная функция  $\psi(x, t)$  функции  $\psi_{\varepsilon}(x, t)$  будет слабым решением задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi - 3u_0^2 \psi - \int_{\partial \Omega} K(\xi, x) \psi(\xi, t) d\xi &= (u_0 - u_d)^5, \\ \psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} &= 0, x \in \Omega, \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, (x, t) \in S, \end{aligned}$$

и из условия (12) получаем

$$\int_Q (\psi + N\vartheta_0)(\vartheta - \vartheta_0) dxdt \geq 0 \forall \vartheta \in V.$$

Теорема 2 доказана. □

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 408 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М. : Наука, 1987. 368 с.
3. *Пулькина Л. С., Савенкова А. Е.* Задача с нелокальным интегральным условием второго рода для одномерного гиперболического уравнения // Вест. Сам. гос. тех. ун-та, сер. физ.-мат. науки. 2016. 20, № 2. С. 276–289.
4. *Тагиев Р. К., Габиров В. М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2016. 20, № 1. С. 54–64.
5. *Guliyev H. F., Tagiev H. T.* An optimal control problem with non-local conditions for the weakly nonlinear hyperbolic equation // Optimal control applications and methods. 2013. 34, № 2. С. 216–235.

Марданов Мисир Джумаил оглы  
 Институт математики и механики НАНА  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика  
 E-mail: misirmardanov@yahoo.com

Гулиев Гамлет Фарман оглы  
 Институт математики и механики НАНА  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика  
 E-mail: hamletguliyev51@gmail.com

Тагиев Хикмет Тахир оглы  
 Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика  
 E-mail: tagiyevht@gmail.com



## К ОПТИМАЛЬНЫМ ПРОЦЕССАМ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ

© 2023 г. Р. О. МАСТАЛИЕВ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, математическая модель которой задается стохастическим обыкновенным разностным уравнением, описывающим влияние случайных, неконтролируемых помех. Целевой функционал, определяющий качество управления, представляет собой функционал типа Майера. Учитывая стохастические свойства задачи и благодаря модифицированному варианту метода приращений функционала установлено необходимое условия оптимальности первого порядка в форме дискретного линеаризованного принципа максимума Понтрягина и исследованы квазиособые управления на оптимальность.

**Ключевые слова:** стохастические дискретные системы 1, оптимальное управление 2, условие оптимальности 3, линеаризованный принцип максимума 4, квазиособое управление 5.

**AMS Subject Classification:** 39A50, 49K05

Рассмотрим многомерную управляемую систему, задаваемую стохастическим разностным уравнением [1, 2, 5, 6]

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t), \xi(t)), t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad (1)$$

и начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния системы, конечная последовательность  $T$  задана, причем  $t_1 - t_0$  – натуральное число,  $x_0$  – случайный вектор с заданным законом распределения,  $f(t, x, u, \xi)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(x, u)$  до второго порядка включительно,  $\xi(t) \in R^m, t \in T$  – случайный вектор с известным законом распределения, описывающий случайные внешние воздействия на объект управления,  $u(t)$  –  $r$ -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества  $U \subset R^r$ , т. е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T. \quad (3)$$

На решениях системы (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминальный функционал

$$J(u) = E\varphi(x(t_1)). \quad (4)$$

Здесь  $\varphi(x) \in R^1$  – заданная, дважды непрерывно-дифференцируемая функция, а  $E$  – оператор математического ожидания.

Задача оптимального управления заключается в нахождении функций состояния  $x(t)$  и управления  $u(t)$  из множества допустимых управлений для дискретными времени  $T$ , которые минимизируют функционал (4) при ограничениях (1)–(3).

Целью работы является установление аналога дискретного линеаризованного принципа максимума Понтрягина и нахождение необходимых условий оптимальности второго порядка для квазиособых управлений [3, 4] в изучаемой стохастической дискретной задаче оптимального управления (1)–(4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азанов В. М.* Оптимальное управление дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным временем окончания // Автоматика и телемеханика. 2020. 12. С. 3–28.
2. *Баширцева И. А., Ряшко Л. Б.* Об управлении стохастической чувствительностью дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 2010. 9. С. 103–119.
3. *Габасов Р. Ф.* Теории оптимальных дискретных процессов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. 8. С. 780–796.
4. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. LAP RU, 2017. 263 с.
5. *David D. Swarder.* Optimal control of discrete-time stochastic systems // Journal of mathematical analysis and applications/ 1966. 15. С. 253–263.
6. *Sie-Long Kek, Mohd Ismail Abdul Aziz.* Optimal control of discrete-time linear stochastic dynamic system with model-reality differences // International conference on machine learning and computing, IPCSIT/ 2011. P. 573–578.

Масталиев Рашад Огтай  
Университет Азербайджан,  
Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской  
Республики (ИСУ МНОАР)  
E-mail: rashad.mastaliyev@au.edu.az



## ПОИСК РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В НЕВОГНУТОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЕ

© 2023 г. И. М. МИНАРЧЕНКО

**Аннотация.** Рассматривается некооперативная игра в нормальной форме с квадратичными функциями выигрыша и множествами стратегий, заданными выпуклыми многогранниками. Квазивогнутость функций выигрыша по собственным переменным игроков не предполагается, в силу чего не гарантируется существование равновесия по Нэшу. Посредством функции Никайдо – Исоды задача на поиск равновесия сводится к задаче минимизации неявно заданной невыпуклой функции. Предлагается метод отыскания глобального минимума, основанный на аппроксимации целевой функции опорными минорантами. Результатом работы метода является либо точка равновесия, либо заключение, что игра не имеет таковых. Для решения вспомогательных задач невыпуклой квадратичной оптимизации, возникающих при поиске равновесия, исследуется метод типа ветвей и границ, учитывающий специфику рассматриваемой постановки.

**Ключевые слова:** равновесие по Нэшу, невогнутая игра, глобальная оптимизация, опорная функция.

**AMS Subject Classification:** 90C33, 90C26

**1. Постановка задачи.** Рассматривается некооперативная игра  $n$  лиц в нормальной форме. Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество игроков,  $X_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$  – множество стратегий  $i$ -го игрока,  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  – общее число переменных,  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \subset \mathbb{R}^m$  – множество ситуаций игры,  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  – функция выигрыша  $i$ -го игрока.  $\mathbb{R}$  обозначает множество действительных чисел. Для любого  $i \in N$  будем предполагать, что  $X_i$  является ограниченным множеством вида

$$X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} : A_i x_i \leq b_i\}, \quad (1)$$

где  $A_i \in \mathbb{R}^{r_i \times m_i}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ ,  $i \in N$ . Функции выигрыша определим следующим образом:

$$f_i(x) = x_i^\top \left( \frac{1}{2} B_i x_i + d_i \right) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_i^\top C_{ij} x_j, \quad i \in N, \quad (2)$$

где  $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  – симметричные и, вообще говоря, знаконеопределённые матрицы,  $C_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ .

Обозначим  $(y_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Задача заключается в нахождении равновесия по Нэшу, то есть такой ситуации  $x^* \in X$ , для которой выполнено

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*), \quad x_i \in X_i, \quad i \in N.$$

Поскольку квазивогнутость функций  $f_i(\cdot, x_{-i})$ ,  $i \in N$ , для всех допустимых  $x_{-i}$  не предполагается, существование равновесия не гарантируется [3] (см. пример в [6]). Задачи игроков, заключающиеся в максимизации собственного выигрыша, являются задачами невыпуклой квадратичной оптимизации, и, таким образом, постановка на поиск равновесия относится к NP-трудным задачам.

---

Исследование выполнено в рамках государственного задания по программе фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг. (проект № FWEU–2021–0006 [AAAA–A21–121012090034–3]).

**2. Сведение к задаче оптимизации.** Введём функцию  $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  вида [7]:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i \in N} (f_i(y_i, x_{-i}) - f_i(x_i, x_{-i})),$$

а также функцию оптимального значения

$$F(x) = \max_{y \in X} \varphi(x, y).$$

Функцию  $\varphi$  называют функцией Никайдо–Исоды. Нетрудно убедиться, что  $F(x) \geq 0$  для любых  $x \in X$ . Для того чтобы ситуация  $x^* \in X$  являлась равновесием по Нэшу в рассматриваемой игре, необходимо и достаточно, чтобы  $F(x^*) = 0$  [7]. Отсюда следует, что множество равновесий является пустым тогда и только тогда, когда  $F(x) > 0$  для любых  $x \in X$ . Принимая во внимание неотрицательность функции  $F$ , рассмотрим задачу

$$F(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (3)$$

Если множество равновесий непусто, то оно совпадает с множеством решений задачи (3) [5].

Введём следующие векторы и матрицы:  $d = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)^\top$ ,  $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^\top$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & 0 & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Заметим,  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$ ,  $b \in \mathbb{R}^r$ , где  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ . С учётом (1), (2) функция  $F$  может быть переписана в следующем виде:

$$F(x) = \max_{y \in X} \left[ \frac{1}{2} y^\top B y + y^\top (C x + d) \right] - x^\top \left( \frac{1}{2} B + C \right) x - x^\top d,$$

где  $X = \{x \in \mathbb{R}^m : A x \leq b\}$ .

Решение задачи (3) сопряжено с двумя трудностями. Во-первых, функция  $F$  задана неявно. Вычисление её значения в одной точке требует решения невыпуклой задачи квадратичной оптимизации. Во-вторых, функция  $F$  сама по себе является невыпуклой и многоэкстремальной. У неё могут существовать локальные минимумы, не являющиеся равновесиями.

**3. Метод поиска равновесия.** Для решения задачи (3) предлагается метод глобального поиска, основанный на аппроксимации целевой функции  $F$  опорными функциями. Поскольку данный метод позволяет получить глобальное решение задачи (3), то результатом работы метода является либо равновесная точка, либо заключение о том, что игра не имеет таковых.

Обозначим:

$$\rho(x, y) = \sum_{i \in N} f_i(y_i, x_{-i}) = \frac{1}{2} y^\top B y + y^\top (C x + d). \quad (4)$$

Идея метода заключается в том, чтобы на каждой итерации  $k$  в текущей точке  $x^k$  строить в качестве аппроксимации опорную к  $F$  миноранту  $\tilde{F}_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  вида [5]:

$$\tilde{F}_k(x) = \max_{0 \leq j \leq k} \{\rho(x, y^j)\} - x^\top \left( \frac{1}{2} B + C \right) x - x^\top d,$$

где  $y^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , – решение задачи

$$\rho(x^j, y) \rightarrow \max, \quad y \in X. \quad (5)$$

Очередное приближение  $x^{k+1}$  выбирается как решение задачи

$$\tilde{F}_k(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (6)$$

Поскольку  $\rho$  линейна по первой переменной, функция  $v(x) = \max\{\rho(x, y) \mid y \in X\}$  выпукла. Следовательно,  $\rho(x, y^j) \leq v(x)$  и  $\rho(x^j, y^j) = v(x^j)$  для любых  $x \in X$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Таким образом,

$\tilde{F}_k(x) \leq F(x)$  и  $\tilde{F}_k(x^k) = F(x^k)$  для всех  $x \in X$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Задачу (6) удобнее переписать в следующем виде:

$$\theta(\alpha, x) = \alpha - x^\top \left( \frac{1}{2}B + C \right) x - x^\top d \rightarrow \min_{(\alpha, x)}, \quad x \in X, \quad (7)$$

$$\alpha \geq \rho(x, y^j), \quad 0 \leq j \leq k. \quad (8)$$

Метод решения задачи (3) следующий:

- 1) выбрать  $x^0 \in X$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ,  $\varepsilon_3 > 0$ , положить  $F^{0*} := +\infty$ ,  $k := 0$ ;
- 2) определить  $y^k$  как решение задачи (5) при  $j = k$ ;
- 3) если  $\varphi(x^k, y^k) < F^{k*}$ , то  $F^{k*} := \varphi(x^k, y^k)$ ,  $x^{k*} := x^k$ ;
- 4) если  $F^{k*} \leq \varepsilon_1$ , то СТОП:  $x^{k*}$  является равновесием;
- 5) определить  $(\tilde{\alpha}_k, \tilde{x}^k)$  как решение задачи (7)–(8);
- 6) если  $\theta(\tilde{\alpha}_k, \tilde{x}^k) > \varepsilon_2$ , то СТОП: равновесий нет;
- 7) если  $F^{k*} - \theta(\tilde{\alpha}_k, \tilde{x}^k) \leq \varepsilon_3$ , то СТОП: равновесий нет;
- 8) положить  $x^{k+1} := \tilde{x}^k$ ,  $F^{(k+1)*} := F^{k*}$ ,  $k := k + 1$ , перейти на шаг 2.

На шагах 2 и 5 необходимо решать задачи глобальной квадратичной оптимизации: (5) и (7)–(8). Для этого предлагается использовать метод типа ветвей и границ [4], учитывающий квадратичный вид функций выигрыша, а также вид множеств стратегий игроков.

**4. Решение вспомогательных задач квадратичной оптимизации.** Пусть рассматривается задача нахождения глобального минимума квадратичной функции на ограниченном множестве, заданном линейными ограничениями:

$$q(x) = x^\top Qx + x^\top c \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\}. \quad (9)$$

Известно, что любая квадратичная функция соответствующим линейным преобразованием может быть приведена к сепарабельному виду [2]. Пусть задача (9) после приведения к сепарабельному виду принимает вид

$$\bar{q}(z) \rightarrow \min, \quad z \in \bar{X}. \quad (10)$$

Глобальный оптимум сепарабельной квадратичной функции на параллелепипеде может быть легко вычислен, поскольку такая задача распадается на  $m$  задач квадратичной оптимизации одной переменной.

Схема метода ветвей и границ требует вычисление оценок снизу и сверху для глобального оптимума. Для получения оценки снизу глобального минимума задачи (10) будем минимизировать функцию  $\bar{q}$  на описанном вокруг  $\bar{X}$  параллелепипеде минимального объёма. Для построения такого параллелепипеда требуется решить  $2m$  задач линейной оптимизации.

Для вычисления оценки сверху будем минимизировать функцию  $\bar{q}$  на вписанном в  $\bar{X}$  параллелепипеде максимального объёма. Для построения такого параллелепипеда требуется решить задачу выпуклой оптимизации. Разбиению подлежит часть множества  $\bar{X}$ , не покрытая вписанным в него параллелепипедом. Оценка сверху может быть улучшена путём запуска метода локального поиска из различных начальных приближений.

Для сокращения времени работы метода ветвей и границ следует использовать следующие свойства рассматриваемой постановки.

- 1) В задаче (5) при различных  $j$  меняется только вектор коэффициентов линейной части целевой функции. В [2] показано, что в сепарабельной форме линейная часть функции  $\bar{q}$  равна нулю тогда и только тогда, когда  $\text{rank}(Q, c) = \text{rank}(Q)$ . Таким образом, для тех  $j$ , для которых выполнено условие

$$\text{rank}(B, Cx^j + d) = \text{rank}(B),$$

решение  $y^j$  задачи (5) не меняется.

- 2) С учётом (4) задача (5) распадается на  $n$  задач размерностей  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Данные задачи имеют меньшую размерность, чем исходная, и могут быть решены параллельно.

- 3) Нетрудно видеть, что  $\tilde{F}_k(x) \leq \tilde{F}_{k+1}(x)$ , следовательно, при решении задачи (7)–(8) в качестве оценки снизу может быть использовано оптимальное значение целевой функции  $\theta$  с предыдущей итерации.

Предлагаемый в настоящей работе метод поиска равновесия ранее рассматривался автором в [1, 6], однако методы решения вспомогательных задач квадратичной оптимизации (5) и (7)–(8) для матрицы  $B$  общего вида не исследовались. Отметим, что предлагаемый подход к нахождению равновесия может быть адаптирован для отыскания всех равновесных точек в игре.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Минарченко И. М.* О поиске равновесия по Нэшу в квазивогнутых квадратичных играх // Дискретный анализ и исследование операций. 2023. 30, № 1. С. 67–84.
2. *Avriel M., Diewert W. E., Schaible S., Zang I.* Generalized concavity. Philadelphia : SIAM, 2010. 348 pp.
3. *Friedman J. W.* Oligopoly and the theory of games. Amsterdam : North-Holland, 1977. 311 pp.
4. *Horst R., Tuy H.* Global optimization: Deterministic approaches. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1996. 745 pp.
5. *Khamisov O.* A global optimization approach to solving equilibrium programming problems // in: Optimization and Optimal Control. World Scientific, 2003. P. 155–164.
6. *Minarchenko I.* Search of Nash equilibrium in quadratic n-person game // in: Lecture Notes in Computer Science/ International Conference on Discrete Optimization and Operations Research 2016 (DOOR-2016). Cham : Springer, 2016. 9869. P. 509–521.
7. *Nikaidô H., Isoda K.* Note on non-cooperative convex games // Pacific Journal of Mathematics. 1955. 5, № 5. P. 807–815.

Минарченко Илья Михайлович

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: minar@isem.irk.ru



## ОБ ОПТИМИЗАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО И НЕКОГЕРЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2023 г. О. В. МОРЖИН

**Аннотация.** В докладе дается краткое описание математических задач и методов по оптимальному управлению квантовыми системами в целом. Представлены результаты по некоторым задачам оптимального управления для открытых квантовых систем с одновременными когерентным и некогерентным управлениями.

**Ключевые слова:** квантовые системы, когерентное и некогерентное управления, задачи оптимального управления, методы оптимизации.

**AMS Subject Classification:** 81Q93, 34H05

Теория оптимального управления квантовыми системами (атомы, молекулы и т. п.) является важной с точки зрения квантовых технологий, использует разные математические методы, например методы бесконечномерной и конечномерной оптимизации [2–5]. Например, как известно, математическое моделирование разных объектов квантовой информации (перенос по спиновой цепочке, генерация квантовых вентилях) осуществляется в терминах задач оптимального управления с разными квантово-механическими уравнениями, критериями, ограничениями и т. д. [12, 13, 16].

Статьи [14, 15] дают основу для манипулирования открытыми квантовыми системами с когерентным управлением (в гамильтониане) и некогерентным управлением (в гамильтониане через сдвиг Лэмба и в супероператоре диссипации). На основе [14, 15] ряд статей был написан, включая [6–11].

План доклада: 1) краткое введение в целом о математических задачах и методах по оптимальному управлению квантовыми системами; 2) обзорно про некоторые результаты по некоторым задачам оптимального управления для открытых конечноуровневых квантовых систем с одновременными когерентным и некогерентным управлениями, в том числе про итерационные методы типа Кротова, одношаговый, двухшаговый и трехшаговый методы проекции градиента, стохастический подход нулевого порядка и т.п.) [6–11].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовомеханическими процессами. М. : Наука, 1984. 256 с.
2. D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics. 2nd Ed.. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2021. 416 pp., <https://doi.org/10.1201/9781003051268>.
3. Koch C.P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S.J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe // EPJ Quantum Technol. 2022. 9, art. no. 19, <https://doi.org/10.1140/epjqt/s40507-022-00138-x>.
4. Kuprov I. Spin: From Basic Symmetries to Quantum Optimal Control. Cham : Springer, 2023, <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05607-9>.

Частичная поддержка Российского научного фонда (проект № 22-11-00330), Минобрнауки (№ 075-15-2020-788), программы “Приоритет-2030” (стратегический проект “Квантовый интернет” в МИСИС), K2-2022-025.



5. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Krotov method for optimal control of closed quantum systems // Russian Math. Surveys. 2019. 74. P. 851–908, <https://doi.org/10.1070/RM9835>.
6. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Maximization of the overlap between density matrices for a two-level open quantum system driven by coherent and incoherent controls // Lobachevskii J. Math. 2019. 40. С. 1532–1548, <https://doi.org/10.1134/S1995080219100202>.
7. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Maximization of the Uhlmann–Jozsa fidelity for an open two-level quantum system with coherent and incoherent controls // Phys. Part. Nucl. 2020. 51. P. 464–469, <https://doi.org/10.1134/S1063779620040516>.
8. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Optimal state manipulation for a two-qubit system driven by coherent and incoherent controls // Quantum Inf. Process. 2023. 22, art. no. 241, <https://doi.org/10.1007/s11128-023-03946-x>.
9. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* On optimization of coherent and incoherent controls for two-level open quantum systems // Izv. RAN. Ser. Mat. 2023 (in press)/ [arXiv: arXiv:2205.02521](https://arxiv.org/abs/2205.02521) [quant-ph].
10. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Krotov Type Optimization of Coherent and Incoherent Controls for Open Two-Qubit Systems // Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math. 2023 (in press)/ [arXiv: arXiv:2308.06119](https://arxiv.org/abs/2308.06119) [quant-ph].
11. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Optimization of time-dependent decoherence rates and coherent control for a qutrit system, 2023/ [arXiv: arXiv:2308.03976](https://arxiv.org/abs/2308.03976) [quant-ph].
12. *Murphy M., Montangero S., Giovannetti V., Calarco T.* Communication at the quantum speed limit along a spin chain // Phys. Rev. A. 2010. 82, art. no. 022318, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.022318>.
13. *Palao J.P., Kosloff R.* Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations // Phys. Rev. Lett. 2002. 89, art. no. 188301, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.188301>.
14. *Pechen A., Rabitz H.* Teaching the environment to control quantum systems // Phys. Rev. A. 2006. 73, art. no. 062102, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.062102>.
15. *Pechen A.* Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // Phys. Rev. A. 2011. 84, art. no. 042106, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.042106>.
16. *Volkov B.O., Morzhin O.V., Pechen A.N.* Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates // J. Phys. A. 2021. 54, art. no. 215303, <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abf45d>.

Моржин Олег Васильевич  
Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН (МИАН РАН)  
Университет науки и технологий МИСИС (НИТУ МИСИС)  
E-mail: morzhin.oleg@yandex.ru



## ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЗАДАЧА СОВМЕСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГРАММНОГО И ВОЗМУЩЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

© 2023 г. А. Д. ОВСЯННИКОВ

**Аннотация.** Работа посвящена разработке математических моделей, ориентированных на решение проблем моделирования, анализа и оптимизации сложной электрофизической аппаратуры, в частности ускорителей заряженных частиц. Представляется актуальным построение новых математических моделей, позволяющих проводить совместную оптимизацию программного и ансамбля возмущенных движений.

**Ключевые слова:** математическая модель, программное движение, пучок траекторий, возмущенное движение, оптимизация.

**AMS Subject Classification:** 49K99

**1. Введение.** В докладе рассматривается задача совместной оптимизации программного и пучка (ансамбля) возмущенных движений [1, 2]. Такие задачи возникают, например, при исследовании проблем стабилизации программного движения. Заметим также, что от выбора программного движения зависят разнообразные характеристики динамики возмущенных движений. Так при исследовании динамики пучка заряженных частиц в ускорителях оказалось, что наиболее эффективно проводить оптимизацию динамики пучка частиц при совместной оптимизации программного (движения синхронной частицы) и ансамбля возмущенных движений [4, 5]. Для рассматриваемой в работе задачи приводятся необходимые условия оптимальности и доказывается, что функция, достигающая при оптимальном управлении максимума, является постоянной.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим управляемую динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = F(x, y, u) \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad (3)$$

$$y(0) = y_0 \in M_0. \quad (4)$$

Здесь  $t \in T_0 = [0, T]$  – независимая переменная,  $T$  – фиксированное число,  $x \in R^n$  и  $y \in R^m$  – векторы фазовых переменных,  $u \in R^r$  – вектор-функция управления,  $M_0$  – компактное множество ненулевой меры. Вектор-функции  $f(x, u)$  и  $F(x, y, u)$  предполагаются достаточно гладкими. Считаем, что допустимые управления  $u = u(t)$ ,  $t \in T_0$ , составляют некоторый класс  $D$  кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компактного множества  $U$ . Предполагаем, что система (1),(2) имеет единственное решение задачи Коши при фиксированном  $x_0$  и произвольном  $y_0 \in M_0$  на всем интервале  $T_0$  при всех допустимых управлениях  $u \in D$ .

Под программным (расчетным, выделенным) движением будем понимать в дальнейшем решение подсистемы (1) при начальном условии (3). Решения подсистемы (2) с начальными условиями (4) при фиксированном программном движении будем называть возмущенными движениями.

Введем функционал

$$I(u) = I_1(u) + I_2(u), \quad (5)$$

где

$$I_1(u) = g_1(x(T)), \quad (6)$$

$$I_2(u) = \int_{M_{T,u}} g_2(y_T) dy_T. \quad (7)$$

Здесь множество  $M_{T,u} = \{y_T | y_T = y(T, x_0, y_0, u), y_0 \in M_0, x(0) = x_0\}$  есть сечение в момент  $T$  пучка траекторий подсистемы (2), исходящих из множества  $M_0$  при управлении  $u(t)$  и соответствующем программном движении  $x(t)$ . Функции  $g_1, g_2$  – неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Задачу минимизации функционала (5) будем называть задачей совместной оптимизации программного движения и динамики возмущенных движений.

**3. Заключение.** В докладе рассматривается нелинейная автономная динамическая система. Для исследуемого функционала (5) приводятся необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Показано, что функция, достигающая максимума, является постоянной функцией. Аналогичный результат имеет место при управлении отдельной траекторией [3]. Сформулированная теорема аналогична принципу максимума Понтрягина, и ее можно понимать как распространение принципа максимума на данную задачу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников А. Д.* Управление пучком заряженных частиц с учетом их взаимодействия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 82–92.
2. *Овсянников А. Д.* Об одном классе задач оптимизации в электростатическом поле // Доклады Академии наук. 2013. 453, № 4. С. 383.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
4. *Ovsyannikov A. D., Durkin A. P., Ovsyannikov D. A., Svistunov Yu. A.* Acceleration of different ion types in single rfq structure // Problems of atomic science and technology. 2016. 103, № 3. P. 54–56.
5. *Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V., Durkin A. P., Papkovich V. G.* Application of optimization techniques for RFQ design // Problems of atomic science and technology. 2014. 91, № 3. P. 116–119.

Овсянников Александр Дмитриевич  
 Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ)  
 E-mail: a.ovsyannikov@spbu.ru



## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ

© 2023 г. Д. А. ОВСЯННИКОВ, Е. Д. КОТИНА

**Аннотация.** Исследуются проблемы программного управления пучком траекторий. Предлагаемые в работе функционалы могут эффективно быть использованы при исследовании задач управления пучками заряженных частиц, а также при построении поля скоростей при обработке различных изображений, в частности медицинских диагностических изображений. Проблема построения поля скоростей рассматривается как задача управления и оптимизации, причем, в отличие от предыдущих работ авторов, при оптимизации используются макропараметры, характеризующие исследуемые объекты. Рассматривается нелинейная динамическая система и линейный случай, получены вариации исследуемых функционалов и даются необходимые условия оптимальности.

**Ключевые слова:** программное управление, поле скоростей, пучок траекторий, вариация функционала, оптимизация, обработка изображений.

**AMS Subject Classification:** 49K99

**1. Введение.** Построению программных управлений посвящено множество публикаций различных авторов. В настоящей работе рассматриваются задачи программного управления пучком траекторий [1, 5, 6]. При этом изучается задача перевода одной точки в другую с учетом плотности распределения точек в соответствующих множествах фазового пространства. Такие задачи возникают при управлении пучками заряженных частиц, а также, например, при обработке изображений. Особо следует отметить, что рассматриваемые в работе функционалы могут эффективно быть использованы при построении поля скоростей. Проблема восстановления поля скоростей возникает при решении многих прикладных задач. Это могут быть и задачи физического эксперимента, исследования сложных механических систем, задачи электродинамики, связанные с построением магнитных полей, реализующих заданное поле скоростей [2, 12] и т.д. В вопросах обработки изображений, данная проблема известна, как задача определения оптического потока для последовательных изображений [7]. Обработка и анализ изображений, в том числе построение поля скоростей, актуальны в таких важных областях, как медицинская диагностика, робототехника, компьютерное зрение, включающее методы отслеживания объектов и анализа движения на цифровых изображениях, а также космические исследования, исследования движения арктических льдов, транспортных потоков и т.д. [3, 8, 11]. В предыдущих работах авторов рассматривалась проблема построения поля скоростей, в частности, для обработки радионуклидных изображений с использованием оптимизационного подхода, на основе как непрерывных [10], так и дискретных систем [9]. В данной работе задача построения поля скоростей также рассматривается, как задача управления и оптимизации, однако при оптимизации используются макропараметры, являющиеся характеристиками исследуемых объектов.

**2. Задача программного управления.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (1)$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  –  $n$ -вектор фазовых координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $u = u(t)$  –  $r$ -мерная вектор-функция на  $[0, T]$ ,  $T$  – фиксировано,  $f = f(t, x, u)$  –  $n$ -мерная вектор-функция непрерывная вместе с частными производными  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $i, j, k = \overline{1, n}$  по переменным  $x, u$  и кусочно-непрерывная

по  $t$ . Считаем, что управления  $u = u(t)$  составляют класс  $D$  векторных кусочно-непрерывных функций со значениями в  $U$ ,  $U$  – компакт в  $R^r$ .

Рассмотрим решения системы (1) при

$$x(0) = x_0 \in M_0. \quad (2)$$

Здесь  $M_0 \in R^n$  – множество начальных значений для системы (1). Считаем далее, что  $M_0$  есть компактное множество ненулевой меры Лебега. Предполагаем, что решение задачи Коши с условием (2) определено на интервале  $[0, T]$  при произвольном управлении  $u \in D$  и любом  $x_0 \in M_0$ .

Обозначим через

$$x(t) = x_t = x(t, x_0, u), t \in [0, T]$$

решение системы (1) с начальным условием (2).

Множество этих решений назовем пучком траекторий, исходящих из множества  $M_0$  при заданном векторе управления  $u$ . Обозначим через  $M_{t,u}$  сечение пучка траекторий в момент времени  $t$  при фиксированном векторе  $u$ , т.е. множество

$$M_{t,u} = \{x(t) = x(t, x_0, u), x_0 \in M_0\}.$$

Далее будем для определенности считать, что вектор  $x$  задает координаты некоторых частиц в фазовом пространстве.

Введем функцию плотности распределения частиц  $\rho(t, x)$ . Уравнение, которое определяет изменение функции плотности распределения частиц в пространстве с течением времени вдоль траекторий системы (1) имеет вид [5, 6]:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + \rho(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0. \quad (3)$$

При этом предполагаем, что  $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ ,  $x \in M_0$ ,  $\rho_0(x)$  – заданная функция.

Отметим, что функция  $\rho = \rho(t, x)$  в различных задачах механики и электродинамики играет роль плотности распределения массы или заряда, а при обработке изображений она может также играть роль количественной характеристики изображения (яркости), зависящей от пространственных координат и времени, в случае радионуклидных изображений, плотности распределения радиофармпрепарата (РФП) [8, 11]. Уравнение (3) называют уравнением Лиувилля или уравнением переноса [5, 6]. Если функция  $\rho(t, x)$  описывает изменение плотности распределения вероятности во времени и фазовом пространстве координат динамической системы (1), то уравнение (3) есть уравнение Фокера–Планка–Колмогорова [4].

Рассмотрим центр тяжести частиц на сечении  $M_{T,u}$ , определяемый плотностью распределения  $\rho(t, x)$  в момент времени  $T$ , а именно:

$$\bar{x}(u) = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \int_{M_{T,u}} x_T \rho(T, x_T) dx_T. \quad (4)$$

Наряду с функцией  $\rho(t, x)$  будем рассматривать также функцию  $\hat{\rho}(x)$ , характеризующую плотность распределения частиц в рассматриваемом фазовом пространстве. Обозначим также через  $\hat{x}$  центр тяжести, определяемый плотностью распределения  $\hat{\rho}(x)$  в  $R^n$ . Имеем

$$\hat{x}(u) = \frac{1}{\hat{\rho}_0} \int_{R^n} x_T \hat{\rho}(x_T) dx_T. \quad (5)$$

Не умаляя общности, предполагаем, что

$$\bar{\rho}_0 = \int_{M_0} \rho_0(x_0) dx_0 = 1, \quad \hat{\rho}_0 = \int_{R^n} \hat{\rho}(x) dx = 1.$$

Это позволяет нам также при необходимости трактовать функции  $\rho(t, x)$  и  $\hat{\rho}(x)$  как плотности распределения вероятности во времени и фазовом пространстве координат динамической системы (1).

Введем функционал

$$J(u) = (\bar{x}(u) - \hat{x}(u))^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i(u) - \hat{x}_i(u))^2. \quad (6)$$

Рассматривается задача минимизации функционала (6). Таким образом, ставится задача совпадения центров тяжести, определяемых плотностями распределения  $\rho(T, x)$  и  $\hat{\rho}(x)$ , на соответствующих множествах.

**3. Заключение.** В докладе будут исследованы и другие функционалы, приведены аналитические представления вариации функционалов и необходимые условия оптимальности. Рассматриваемые конкретные функционалы могут быть использованы как при решении многообразных практических задач построения программных управлений, так и при решении некоторых нестандартных задач, например, при построении поля скоростей при обработке изображений. Отметим, что центр тяжести множества  $M_0$ , определяемый плотностью  $\rho_0(x)$ , в силу динамической системы (1) переходит в центр тяжести множества  $M_{T,u}$ , определяемый формулой (4). Задача нахождения управлений минимизирующих функционал (6), то есть совпадения центров тяжести, определяемых формулами (4), (5), возникает при построении поля скоростей при обработке последовательных изображений. В этом случае мы изучаем поле скоростей центров тяжести и других макропараметров последовательности изображений, с последующим определением поля скоростей на всем изображении. В линейном случае исследуется также динамика матрицы вторых моментов. Показано, что в этом случае задачи управления центром тяжести и матрицей вторых моментов, рассматриваемые как задачи управления ансамблем траекторий, сводятся к задачам управления отдельными траекториями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бортаковский А. С.* Теорема разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных линейных переключаемых систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. 2. С. 37–63.
2. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М. : Высшая школа, 1982. 285 с.
3. *Геча В. Я., Жилнев М. Ю., Федоров В. Б., Хрычев Д. А., Худак Ю. И., Шатина А. В.* Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты // Russian Technological Journal. 2020. 8, № 1. С. 97–109, <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>.
4. *Красовский А. А.* Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М. : Наука, 1968. 240 с.
5. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
6. *Овсянников Д. А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
7. *Barron J., Fleet D.* Performance of optical flow techniques // International Journal of Computer Vision. 1994. 12. P. 43–77.
8. *Vazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V.* Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. 7. P. 174–181.
9. *Kotina E. D., Leonova E. B., Ploskikh V. A.* Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. 39. С. 3–16.
10. *Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M.* Optimization approach to the velocity field determining problem // Cybernetics and Physics. 2022. 11, № 3. P. 131–135.
11. *Kotina E., Ploskikh V., Shirokolobov A.* Digital Image Processing in Nuclear Medicine // Physics of Particles and Nuclei. 2022. 53, № 2. P. 535–540.
12. *Ovsyannikov D. A., Kotina E. D.* Determination of velocity field by given density distribution of charged particles // Problems of Atomic Science and Technology. 2012. 79, № 3. P. 122–125.

Овсянников Дмитрий Александрович  
Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ)  
E-mail: [d.a.ovsyannikov@spbu.ru](mailto:d.a.ovsyannikov@spbu.ru)

Котина Елена Дмитриевна  
Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ)  
E-mail: [e.kotina@spbu.ru](mailto:e.kotina@spbu.ru)



ПРИМЕНЕНИЕ СОСТАВНЫХ ФУНКЦИЙ  
ТИПА ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ  
ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. О. Н. САМСОНИК

**Аннотация.** Представлены необходимые и достаточные условия оптимальности импульсных процессов в задаче с промежуточными фазовыми ограничениями. Для билинейной управляемой системы получена составная функция типа Ляпунова, задающая точное описание множества достижимости. Это позволило конкретизировать условия оптимальности и построить задачу математического программирования на множестве точек, соединимых допустимыми траекториями исходной задачи. Предложена схема численного решения задачи.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, траектории ограниченной вариации, промежуточные ограничения, функции типа Ляпунова, численные методы.

**AMS Subject Classification:** 49J21, 11Y11

В работе обсуждаются условия оптимальности в задачах оптимального управления, основанные на применении сильно и слабо монотонных функций типа Ляпунова (см. обзор в [1]). Основная цель – проиллюстрировать на примере билинейной задачи подход к нахождению таких функций и конкретизации соответствующих условий оптимальности. Представленные результаты продолжают исследования, начатые в [3, 4].

Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t) + (ax_2(t) + b)v_1(t), \quad x_1(a) = x_{10}, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t) + (cx_1(t) + d)v_2(t), \quad x_2(a) = x_{20}, \quad (2)$$

$$\int_a^b (v_1(t) + v_2(t))dt \leq M, \quad (3)$$

$$v_1(t) \geq 0, \quad v_2(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in T, \quad (4)$$

где  $T = [a, b]$  – заданный отрезок времени, траектории  $x_1(\cdot)$ ,  $x_2(\cdot)$  – абсолютно непрерывные функции, управления  $v_1(\cdot)$ ,  $v_2(\cdot) \in L_\infty(T)$ ,  $V(t) := \int_a^t (v_1(\tau) + v_2(\tau))d\tau$ . Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $M$ ,  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  неотрицательны, а  $f_1(t)$ ,  $f_2(t) \geq 0$  при всех  $t \in T$ .

Множества достижимости системы (1)–(4) ограничены и, в общем случае, не замкнуты. В качестве траекторий соответствующей импульсной системы мы будем рассматривать непрерывные справа на  $(a, b]$  функции ограниченной вариации  $x_1(\cdot)$ ,  $x_2(\cdot)$ ,  $V(\cdot)$ , к которым сходятся в точках непрерывности последовательности траекторий (1)–(4).

Пусть заданы моменты времени  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$ ,  $a = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = b$ . Обозначим через  $q = (q_0, q_1, \dots, q_N)$  набор конечных и промежуточных значений траектории, где  $q_j = (x_1(\theta_j), x_2(\theta_j), V(\theta_j))$ ,  $j = 0, \dots, N$ . Траекторию будем называть допустимой, если выполняются ограничения

$$q_j \in Q_j, \quad j = 0, \dots, N.$$

Проект реализуется победителем конкурса «Поддержка профессионального развития» благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина, договор гранта № ГЮПР-0006/23.

Здесь  $Q_j$ ,  $j = 0, \dots, N$ , – заданные компактные множества из  $\mathbb{R}^3$ . Соответствующие траекториям импульсные управления являются неотрицательными борелевскими мерами, подробно они описаны в [4]. На множестве допустимых траекторий и соответствующих импульсных управлений рассмотрим задачу (P): Требуется минимизировать функционал  $J = l(q)$ , где  $l$  – непрерывная функция.

Заметим, что в [2, 5, 6] получены необходимые условия оптимальности в форме позиционного принципа максимума вместе с соответствующими алгоритмами улучшения управления, которые можно применить к задаче (P). Эти условия конструктивны, они формулируются при помощи функций типа Ляпунова специального вида, первоначальный вариант которых был предложен В.А. Дыхтой. Однако эти условия имеют локальный характер и не применимы для поиска глобального решения задачи (P). В данной статье используется другой подход.

Для исследования задачи (P) определим функцию  $\varphi$  со свойствами монотонности относительно управляемой системы, позволяющими точно описать ее множество достижимости. Способ нахождения такой функции и ее частичный вид указаны в [4].

Введем вспомогательные функции и обозначения:

$$z_i(t_0, t, y_{i0}) = y_{i0} + \int_{t_0}^t f_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

$$g_1(y) = ay + b, \quad g_2(y) = cy + d,$$

$$G(x_1, x_2) = c(ax_2 + b)^2 - a(cx_1 + d)^2, \quad k = \frac{c}{1 + \sqrt{c/a}},$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{ac}} - \frac{g_1(z_2(t_0, t, y_{20}))}{ag_2(z_1(t_0, t, y_{10}))}, \quad \bar{x}_1 = z_1(t_0, t, y_{10}), \quad \bar{x}_2 = \frac{g_2(z_1(t_0, t, y_{10}))}{\sqrt{ac}} - \frac{b}{a},$$

$$\bar{\bar{V}} = \frac{1}{\sqrt{ac}} - \frac{g_2(z_1(t_0, t, y_{10}))}{cg_1(z_2(t_0, t, y_{20}))}, \quad \bar{\bar{x}}_1 = \frac{g_1(z_2(t_0, t, y_{20}))}{\sqrt{ac}} - \frac{d}{c}, \quad \bar{\bar{x}}_2 = z_2(t_0, t, y_{20}),$$

$$p_1(t_0, t, y_{10}, y_{20}, V) = z_1(t_0, t, y_{10}) + \frac{g_1(y_{20})}{2}V - \frac{g_2(y_{10})}{c} + g_1(y_{20})\sqrt{\frac{V^2}{4} + \frac{1}{ac}},$$

$$p_2(t_0, t, y_{10}, y_{20}, V) = z_2(t_0, t, y_{20}) + \frac{g_2(y_{10})}{2}V - \frac{g_1(y_{20})}{a} + g_2(y_{10})\sqrt{\frac{V^2}{4} + \frac{1}{ac}}.$$

Определим функцию

$$\varphi(t, x_1, x_2, V; t_0, y_{10}, y_{20}),$$

составленную из семи компонент,  $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1, \dots, 7}$ .

1) Зададим функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  по следующему правилу.

При  $G(z_1(t_0, t, y_{10}), z_2(t_0, t, y_{20})) > 0$ :

$$\varphi_1 = -x_1 + \frac{g_2(\bar{\bar{x}}_1)}{cg_1(\bar{\bar{x}}_2)}g_1(x_2) - \frac{d}{c} + g_1(x_2) \left( V - \bar{\bar{V}} - \frac{1}{k} \ln \frac{g_1(x_2)}{g_1(\bar{\bar{x}}_2)} \right),$$

$$G(x_1, x_2) < 0, \quad V \geq \bar{\bar{V}}, \quad x_2 \in \left[ \bar{\bar{x}}_2, \left( \bar{\bar{x}}_2 + \frac{b}{a} \right) \exp \left( k(V - \bar{\bar{V}}) \right) - \frac{b}{a} \right];$$

$$\varphi_2 = -x_2 + \frac{g_1(\bar{\bar{x}}_2)}{ag_2(\bar{\bar{x}}_1)}g_2(x_1) - \frac{b}{a} + g_2(x_1) \left( V - \bar{\bar{V}} - \frac{1}{k} \ln \frac{g_2(x_1)}{g_2(\bar{\bar{x}}_1)} \right),$$

$$G(x_1, x_2) \geq 0, \quad V \geq \bar{\bar{V}}, \quad x_1 \in \left[ \bar{\bar{x}}_1, \left( \bar{\bar{x}}_1 + \frac{d}{c} \right) \exp \left( k(V - \bar{\bar{V}}) \right) - \frac{d}{c} \right];$$

$$\varphi_3 = -x_2 + z_2(t_0, t, y_{20}) + g_2(x_1) \left( V - \frac{x_1 - z_1(t_0, t, y_{10})}{g_1(z_2(t_0, t, y_{20}))} \right)$$

$$x_1 \in [z_1(t_0, t, y_{10}), z_1(t_0, t, y_{10}) + \tilde{V}g_1(z_2(t_0, t, y_{20}))], \quad \text{где } \tilde{V} = \begin{cases} V & \text{при } V \leq \bar{\bar{V}}, \\ \bar{\bar{V}} & \text{при } V > \bar{\bar{V}}. \end{cases}$$



При  $G(z_1(t_0, t, y_{10}), z_2(t_0, t, y_{20})) \leq 0$  функции  $\varphi_1, \varphi_2$  определены как выше с заменой  $\bar{x}_{1,2}$  на  $\bar{x}_{1,2}$  и  $\bar{V}$  на  $\bar{V}$ , а функция  $\varphi_3$  имеет вид:

$$\varphi_3 = -x_1 + z_1(t_0, t, y_{10}) + g_1(x_2) \left( V - \frac{x_2 - z_2(t_0, t, y_{20})}{g_2(z_1(t_0, t, y_{10}))} \right)$$

$$x_2 \in [z_2(t_0, t, y_{20}), z_2(t_0, t, y_{20}) + \tilde{V} g_2(z_1(t_0, t, y_{10}))], \quad \text{где } \tilde{V} = \begin{cases} V & \text{при } V \leq \bar{V}, \\ \bar{V} & \text{при } V > \bar{V}. \end{cases}$$

2) Зададим функции  $\varphi_4 - \varphi_7$ :

$$\varphi_4 = -x_2 + z_2(t_0, t, y_{20}) + V g_2(y_{10}) - \frac{c}{g_1(y_{20})} (x_1 - z_1(t_0, t, y_{10}))^2 +$$

$$+ \left( cV - \frac{g_2(y_{10})}{g_1(y_{20})} \right) (x_1 - z_1(t_0, t, y_{10})), \quad x_1 \in [p_1(t_0, t, x_1, x_2, V), z_1(t_0, t, y_{10}) + V g_1(y_{20})];$$

$$\varphi_5 = -x_1 + z_1(t_0, t, y_{10}) + V g_1(y_{20}) - \frac{a}{g_2(y_{10})} (x_2 - z_2(t_0, t, y_{20}))^2 +$$

$$+ \left( aV - \frac{g_1(y_{20})}{g_2(y_{10})} \right) (x_2 - z_2(t_0, t, y_{20})), \quad x_2 \in [p_2(t_0, t, x_1, x_2, V), z_2(t_0, t, y_{20}) + V g_2(y_{10})];$$

$$\varphi_6 = -x_2 + z_2(t_0, t, y_{20}), \quad V g_1(y_{20}) \leq x_1 - z_1(t_0, t, y_{10}) \leq V g_1(z_2(t_0, t, y_{20}));$$

$$\varphi_7 = -x_1 + z_1(t_0, t, y_{10}), \quad V g_2(y_{10}) \leq x_2 - z_2(t_0, t, y_{20}) \leq V g_2(z_1(t_0, t, y_{10})).$$

Нетрудно показать непосредственной проверкой, что  $\varphi$  — непрерывная и кусочно гладкая функция. При этом  $\varphi$  является слабо монотонной в обратном времени на промежутках  $(\theta_{j-1}, \theta_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ , и удовлетворяет условию

$$\{(x_1, x_2) \mid \varphi(t_0, x_1, x_2, 0; t_0, y_{10}, y_{20}) \leq 0\} = \{y_{10}, y_{20}\},$$

а ее компоненты  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , на этих промежутках строго монотонны относительно управляемой системы ( $t_0 = \theta_{j-1}$ ). Таким образом, функция  $\varphi$  удовлетворяет всем условиям из [3] и является составной функцией типа Ляпунова. Такая функция дает точную оценку множества достижимости, что позволяет сформулировать соответствующие условия оптимальности и алгоритм численного решения.

Обозначим через  $R(t; t_0, y_{10}, y_{20})$  множество достижимости управляемой системы, стартующей в момент времени  $t_0$  из точки  $(y_{10}, y_{20})$ ,

$$R(t; t_0, y_{10}, y_{20}) = \{(x_1(t), x_2(t), V(t)) \mid (x_1(t_0), x_2(t_0), V(t_0)) = (y_{10}, y_{20}, 0)\}.$$

Обозначим через  $E$  множество нулевого подуровня функции  $\varphi$ :

$$E(t; t_0, y_{10}, y_{20}, V_0) = \{(x_1, x_2, V) \mid \varphi(t, x_1, x_2, V - V_0; t_0, y_{10}, y_{20}) \leq 0\}.$$

Тогда из свойств  $\varphi$  следуют включения

$$R(t; t_0, y_{10}, y_{20}) \subseteq E(t; t_0, y_{10}, y_{20}, 0), \quad E(t; t_0, y_{10}, y_{20}, 0) \subseteq R(t; t_0, y_{10}, y_{20}). \quad (5)$$

Рассмотрим конечномерную задачу ( $P_a$ ):

$$l(q_N) \rightarrow \min,$$

$$q_j \in Q_j, \quad j = 0, \dots, N,$$

$$q_j \in E(\theta_j; \theta_{j-1}, q_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $q = (q_0, q_1, \dots, q_N)$ ,  $q_j = (x_{1j}, x_{2j}, V_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Сформулируем условия оптимальности для задачи ( $P$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $\bar{\sigma}$  – допустимый процесс задачи  $(P)$  с траекторией  $(x_1(\cdot), x_2(\cdot), V(\cdot))$ . Пусть  $\bar{q}_{\bar{\sigma}}$  – соответствующий вектор промежуточных значений траектории. Процесс  $\bar{\sigma}$  является глобальным решением задачи  $(P)$  тогда и только тогда, когда  $\bar{q}_{\bar{\sigma}}$  является точкой глобального минимума в задаче  $(P_a)$ .

Доказательство теоремы следует из оценок (5).

Условия оптимальности дают следующую схему численного решения задачи  $P$ .

1. Определить функцию  $\varphi(t, x_1, x_2, V; t_0, y_{10}, y_{20})$ , в которой  $(t, x_1, x_2, V)$  – аргументы, а  $(t_0, y_{10}, y_{20})$  – параметры,

$$\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1, \dots, 7}.$$

2. Численно решить конечномерную задачу  $(P_a)$ . Пусть  $q^* = (q_0^*, q_1^*, \dots, q_N^*)$ ,  $q_j^* = (x_{1j}^*, x_{2j}^*, V_j^*)$ ,  $j = 1, \dots, N$  – найденное решение задачи  $(P_a)$ .
3. На каждом промежутке  $(\theta_{j-1}, \theta_j]$ ,  $j = 1, \dots, N$ , используя принцип максимума для импульсных процессов, нужно найти траекторию и соответствующее импульсное управление, удовлетворяющие условию

$$(x_1(\theta_{j-1}), x_2(\theta_{j-1}), V(\theta_{j-1})) = q_{j-1}^*, (x_1(\theta_j), x_2(\theta_j), V(\theta_j)) = q_j^*.$$

Тогда найденный процесс будет претендентом на глобальное решение задачи  $(P)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дыхта В. А., Самсонык О. Н. Неравенства Гамильтона – Якоби в задачах управления. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2015.
2. Dykhta V. A., Samsonyuk O.N. Optimality conditions with feedback controls for optimal impulsive control problems // IFAC-Papers OnLine. 2018. 51, № 32. С. 509–514.
3. Samsonyuk O. N. Optimality conditions for optimal impulsive control problems with multipoint state constraints // Journal of Global Optimization. 2020. 76, № 3. С. 625–644.
4. Samsonyuk O. N., Sorokin S. P. Optimality conditions for impulsive processes with intermediate state constraints // The 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2020) (Moscow, Russia, June 3–5, 2020). IEEE, 2020.
5. Samsonyuk O. Sorokin S., Staritsyn M. Feedback optimality conditions with weakly invariant functions for nonlinear problems of impulsive control // в кн.: Lecture Notes in Computer Science/ Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR-2019). Cham. : Springer, 2019. 11548. С. 513–526.
6. Samsonyuk O. Sorokin S., Staritsyn M. Optimal control algorithms based on functions of the Lyapunov type // IFAC-Papers OnLine. 2019. 52, № 16. С. 132–137.

Самсонык Ольга Николаевна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (ИДСТУ СО РАН)

E-mail: samsonyuk.olga@gmail.com



## РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОМ ФОРМАТЕ

© 2023 г. В. А. СРОЧКО, В. Г. АНТОНИК

**Аннотация.** Рассматривается задача линейно-квадратичного типа на множестве кусочно-постоянных управлений, содержащая дискретное возмущение в правой части управляемой системы и неопределенные параметры в квадратичном функционале со знаконеопределенными матрицами. Решение проводится по правилу гарантированного результата и реализуется в форме конечномерной минимаксной задачи. Получены условия на параметры, приводящие целевую функцию к выпукло-вогнутой структуре и открывающие возможность эффективного решения задачи. Это линейные неравенства, содержащие экстремальные собственные значения симметричных матриц.

**Ключевые слова:** линейно-квадратичная задача, дискретные воздействия на систему и функционал, редукция к задаче выпуклого программирования.

**AMS Subject Classification:** 49M25

**1. Введение.** К настоящему времени в теории линейно-квадратичных задач с ограничением на управление оформились и стали стандартными некоторые характерные признаки. В первую очередь это дискретизация по времени и переход на конечномерный уровень кусочно-постоянных воздействий (управление и возмущение). Управление ориентируется на минимум целевого функционала, возмущение парируется в соответствии с принципом гарантированного результата (минимаксный подход).

Обобщение по части целевого функционала связано с отказом от комфортного предположения положительной определенности для матриц квадратичных форм. При этом возникает проблема конструктивной регуляризации итоговой минимаксной задачи в плане ее преобразования к выпукло-вогнутой структуре, допускающей эффективную численную реализацию.

В докладе рассматривается линейно-квадратичная задача, включающую в себя линейную систему с управлением и возмущением, квадратичный функционал терминально-интегрального типа со знаконеопределенными матрицами и параметрами при квадратичных формах. В результате процедуры дискретизации управления и возмущения получена минимаксная задача, которая приводится к благоприятной для эффективного решения выпукло-вогнутой структуре с условиями на параметры. Эти условия (линейные неравенства) носят спектральный характер и связаны с экстремальными собственными значениями соответствующих симметричных матриц.

**2. Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе.** Пусть для  $t \in [t_0, T]$  вектор-функция  $x(t) \in R^n$  определяется линейной системой

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + c(t)v(t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1)$$

с управлением  $u(t) \in R$  и возмущением  $v(t) \in R$  при условии непрерывности  $A(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ .

Определим допустимые воздействия  $(u(t), v(t))$  на систему (1) как множество кусочно-постоянных функций с интервальными ограничениями

$$u(t) \in [u_-, u_+], \quad v(t) \in [v_-, v_+], \quad t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

---

Проект реализуется победителем конкурса «Поддержка профессионального развития» благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина, договор гранта № ГЮПР-0006/23.

Введем на  $[t_0, T]$  набор узловых точек  $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$  и выделим промежутки  $T_j = [t_{j-1}, t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  вместе с характеристическими функциями

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_j, \\ 0, & t \in [t_0, T] \setminus T_j. \end{cases}$$

Образует множества возможных значений

$$Y = \left\{ y = (y_1, \dots, y_m) : y_j \in [u_-, u_+], j = 1, 2, \dots, m \right\},$$

$$Z = \left\{ z = (z_1, \dots, z_m) : z_j \in [v_-, v_+], j = 1, 2, \dots, m \right\}$$

и сформируем функции допустимых воздействий (управление и возмущение)

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^m y_j \chi_j(t), \quad v(t, z) = \sum_{j=1}^m z_j \chi_j(t), \quad t \in [t_0, T], \quad y \in Y, \quad z \in Z.$$

Это ступенчатые функции со значениями  $y_j, z_j$  на заданных промежутках  $T_j = [t_{j-1}, t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , удовлетворяющие ограничениям (2).

Рассмотрим решение  $x(t, y, z)$  системы (1), соответствующее допустимой паре  $(u(t, y), v(t, z))$ .

Определим следующие объекты:

$x^0(t)$  – решение системы (1) при нулевом воздействии ( $u(t) = 0, v(t) = 0$ );

$B_\chi(t) \in R^{n \times m}$  – матрица столбцов  $b(t)\chi_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;

$X_1(t) \in R^{n \times m}$  – решение матричной системы

$$\dot{X}_1(t) = A(t)X_1(t) + B_\chi(t), \quad X_1(t_0) = O;$$

$C_\chi(t) \in R^{n \times m}$  – матрица столбцов  $c(t)\chi_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;

$X_2(t) \in R^{n \times m}$  – решение матричной системы

$$\dot{X}_2(t) = A(t)X_2(t) + C_\chi(t), \quad X_2(t_0) = O.$$

Здесь  $O$  – матрица, составленная из нулевых элементов.

В этих обозначениях справедливо представление

$$x(t, y, z) = x^0(t) + X_1(t)y + X_2(t)z. \quad (3)$$

На множестве фазовых траекторий  $x(t, y, z)$  определим целевую функцию

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \left[ \alpha \langle x(T, y, z), Px(T, y, z) \rangle + \beta \int_{t_0}^T \langle x(t, y, z), Q(t)x(t, y, z) \rangle dt \right].$$

Здесь  $\langle, \rangle$  – скалярное произведение в соответствующем конечномерном пространстве,  $P, Q(t)$  –  $(n \times n)$  симметричные матрицы,  $\alpha > 0, \beta > 0$  – неопределенные параметры (весовые коэффициенты).

Функцию  $\varphi(y, z)$  можно интерпретировать как линейную свертку квадратичных функционалов с коэффициентами  $\alpha, \beta$  в некоторой задаче двухкритериальной оптимизации.

В рамках функции  $\varphi(y, z)$ ,  $y \in Y, z \in Z$ , в соответствии с принципом гарантированного результата, сформулируем следующую минимаксную задачу (минимум по управлениям, максимум по возмущениям)

$$\min_{y \in Y} \max_{z \in Z} \varphi(y, z). \quad (4)$$

Введем функцию максимума

$$\psi(y) = \max_{z \in Z} \varphi(y, z) \quad (5)$$

и представим задачу в традиционной форме

$$\psi(y) \rightarrow \min, \quad y \in Y. \quad (6)$$

Наша установка состоит в получении конструктивных условий на параметры функции  $\varphi(y, z)$  с целью регуляризации (улучшения) задачи (4) в плане ее эффективного численного решения.

**3. Параметрическая регуляризации задачи.** С помощью формулы (3) для  $x(t, y, z)$  справедливо явное выражение целевой функции  $\varphi(y, z)$ :

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \langle y, (\alpha P_{11} + \beta Q_{11})y \rangle + \frac{1}{2} \langle z, (\alpha P_{22} + \beta Q_{22})z \rangle + \langle y, (\alpha P_{12} + \beta Q_{12})z \rangle + \langle y, \alpha P_1 + \beta Q_1 \rangle + \langle z, \alpha P_2 + \beta Q_2 \rangle + \varphi(0, 0).$$

Здесь

$$P_{ij} = X_i^T(T) P X_j(T), \quad Q_{ij} = \int_{t_0}^T X_i^T(t) Q(t) X_j(t) dt, \quad i, j = 1, 2, \quad i \leq j;$$

$$P_i = X_i^T(T) P x^0(T), \quad Q_i = \int_{t_0}^T X_i^T(t) Q(t) x^0(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

Симметричные матрицы  $P_{ii}, Q_{ii}, i = 1, 2$  в силу своей структуры сохраняют свойство знакоопределенности исходных матриц  $P$  и  $Q(t)$  соответственно:

$$P, Q(t) \geq 0 (\leq 0) \Rightarrow P_{ii}, Q_{ii} \geq 0 (\leq 0).$$

В рамках задачи (4) обеспечим функции  $\varphi(y, z)$  свойство выпуклости по  $y$  и вогнутости по  $z$  с помощью параметров  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Соответствующие условия представим через экстремальные собственные значения  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  возникающих матриц.

В результате достаточное условие выпуклости функции  $\varphi(y, z)$  по  $y$  определяется линейным неравенством

$$\alpha \lambda_{\min}(P_{11}) + \beta \lambda_{\min}(Q_{11}) \geq 0. \quad (7)$$

В свою очередь, достаточное условие вогнутости функции  $\varphi(y, z)$  по  $z$  характеризуется неравенством

$$\alpha \lambda_{\max}(P_{22}) + \beta \lambda_{\max}(Q_{22}) \leq 0. \quad (8)$$

Таким образом, пара линейных неравенств (7), (8) с условием положительности параметров  $\alpha, \beta$  обеспечивает целевой функции  $\varphi(y, z)$  выпукло-вогнутую структуру, что является существенно благоприятным фактором в рамках минимаксной задачи (4).

Отметим, что строгие неравенства в (7), (8) обеспечивают выпукло-вогнутое свойство в строгом смысле.

Приведем пример разрешимости системы неравенств (7), (8) вместе с условиями положительности параметров. Представим ситуацию в сокращенном формате

$$p_1 \alpha + q_1 \beta \geq 0, \quad p_2 \alpha + q_2 \beta \leq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (9)$$

и выделим случай совместности системы (9) по знакам коэффициентов  $p_j, q_j, j = 1, 2$ .

Пусть, например,  $p_j < 0, q_j > 0$ . В исходных обозначениях это соответствует следующей знакоопределенности матриц:  $P \leq 0, Q(t) \geq 0$ . Из неравенств (9) получаем

$$\beta \geq \frac{\alpha |p_1|}{q_1}, \quad \beta \leq \frac{\alpha |p_2|}{q_2},$$

что приводит к условию совместности

$$\frac{|p_1|}{q_1} \leq \frac{|p_2|}{q_2}.$$

При этом допустимые значения параметров представляются в виде

$$\alpha > 0, \quad \beta \in \left[ \frac{\alpha |p_1|}{q_1}, \frac{\alpha |p_2|}{q_2} \right].$$

В заключение проведем характеристику минимаксной задачи (4) после ее регуляризации:  $\varphi(y, z)$  – выпукло-вогнутая функция. Тогда составляющие задачи (5), (6) являются выпуклыми: максимум вогнутой функции  $\varphi(y, z)$  по  $z \in Z$  и минимум выпуклой функции  $\psi(y)$  для  $y \in Y$ .

Если регуляризация прошла по строго вогнутому сценарию (строгое неравенство (8)), то внутренняя задача на максимум

$$\varphi(y, z) \rightarrow \max, z \in Z$$

имеет единственное решение  $z(y)$ , и функция  $\psi(y)$  приобретает свойство дифференцируемости с градиентом

$$\nabla\psi(y) = \frac{\partial\varphi(y, z(y))}{\partial y}.$$

С учетом простейшей структуры ограничений (двусторонние неравенства) составляющие мини-макс задачи (5), (6) допускают эффективное решение известными методами выпуклого программирования [2, 4].

**Замечание 1.** В связи с рассмотренной задачей (линейная система с возмущением, задача оптимального гарантированного управления) укажем в качестве альтернативы публикации [1, 3], в которых для линейной терминальной задачи конструируется управление с обратной связью в дискретные моменты времени.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. 44, № 2. Р. 265–286.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011. 620 pp.
3. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН 2022. 28, № 3. Р. 66–82
4. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 304 pp.

Срочко Владимир Андреевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: srochko@math.isu.ru

Антоник Владимир Георгиевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: vga@math.isu.ru



## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К УЛУЧШЕНИЮ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

© 2023 г. Д. О. ТРУНИН, А. Ю. ФЕДОРОВ

**Аннотация.** Для улучшения управления в классе нелинейных задач оптимального управления с терминальными ограничениями конструируется специальная задача о неподвижной точке. Для решения задачи о неподвижной точке строится итерационный метод. Предлагаемый метод последовательных приближений с сохранением всех терминальных ограничений на каждой итерации не использует трудоемкую операцию параметрического варьирования управлений, характерную для градиентных методов.

**Ключевые слова:** управляемая система с ограничениями, задача о неподвижной точке, итерационный метод.

**AMS Subject Classification:** 49M20

**Введение** В работе [1] построены проекционные методы нелокального улучшения управления для класса нелинейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом. В данном классе задач модифицированная сопряженная система представляет собой дифференциально-алгебраическую систему с дополнительными алгебраическими уравнениями. Задача улучшения управления рассматривается как задача о неподвижной точке проекционного оператора управления, для решения которой модифицируются известные методы неподвижных точек.

В статье [3] методы [1] обобщаются на класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Условие нелокального улучшения допустимого управления конструируется в форме специальной системы функциональных уравнений в пространстве управлений с дополнительным алгебраическим уравнением, к решению которой применяется аппарат теории и методов неподвижных точек.

В данной статье рассмотрен новый подход к улучшению управления в системах с ограничениями на основе альтернативной формулы приращения функционала в рассматриваемом классе задач оптимального управления. Для нелокального улучшения допустимых управлений конструируется специальная задача о неподвижной точке с дополнительным алгебраическим условием в пространстве управлений и предлагается итерационный метод ее решения.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается класс нелинейных по состоянию и линейных по управлению задач оптимального управления с одним терминальным ограничением-равенством

$$\dot{x} = A(x, t)u + b(x, t), t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset R^r, \quad (1)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T [\langle d(x, t), u \rangle + g(x, t)] dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\Phi_1(u) = \chi(x(t_1)) = 0. \quad (3)$$

В задаче (1)–(3)  $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$  – вектор управления. Начальное состояние  $x^0 \in R^n$  задано.

Функции  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $d(x, t)$  и  $g(x, t)$  нелинейны и дифференцируемы по  $x$  и непрерывны по  $t$  на множестве  $R^n \times T$ ; функции  $\varphi(x)$  и  $\chi(x)$  нелинейны и дифференцируемы по  $x$ ;  $U \subset R^r$  – выпуклое компактное множество; интервал времени  $T$  фиксирован.

К виду (1)–(3) могут быть приведены различные задачи оптимального управления с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями.

Введем в рассмотрение множество доступных управлений в задаче (1)–(3):

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для доступного управления  $v \in V$  обозначим  $x(t, v), t \in T$  – решение задачи Коши (1) при  $u = v(t), t \in T$ .

Введем в рассмотрение множество допустимых управлений

$$W = \{u \in V : \chi(x(t_1, u)) = 0\}.$$

В задаче (1)–(3) функция Понтрягина с сопряженной переменной  $p \in R^n$  может быть представлена в виде:

$$H(p, x, u, t) = H_0(p, x, t) + \langle H_1(p, x, t), u \rangle,$$

где  $H_0(p, x, t) = \langle p, b(x, t) \rangle - g(x, t)$ ,  $H_1(p, x, t) = A(x, t)^T p - d(x, t)$ .

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа:

$$L(u, \lambda) = \Phi_0(u) + \lambda \Phi_1(u), \lambda \in R.$$

Пусть  $(u^0, v)$  – пара доступных управлений в задаче (1)–(3).

В соответствии с [3] имеет место следующая альтернативная формула приращения функционала Лагранжа, не содержащая остаточных членов разложения:

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) = - \int_T \langle H_1(p(t, v, u^0, \lambda), x(t, u^0), t), v(t) - u^0(t) \rangle dt, \quad (4)$$

где  $p(t, v, u^0, \lambda), t \in T$  – решение модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, v), v(t), t) - r(t), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \langle H_x(p, x(t, v), v(t), t), x(t, u^0) - x(t, v) \rangle + \langle r(t), x(t, u^0) - x(t, v) \rangle = \\ & = H(p, x(t, u^0), v(t), t) - H(p, x(t, v), v(t), t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v)) - \lambda \chi_x(x(t_1, v)) - q, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_x(x(t_1, v)) + \lambda \chi_x(x(t_1, v)), x(t_1, u^0) - x(t_1, v) \rangle + \langle q, x(t_1, u^0) - x(t_1, v) \rangle = \\ & = \varphi(x(t_1, u^0)) - \varphi(x(t_1, v)) + \lambda(\chi(x(t_1, u^0)) - \chi(x(t_1, v))). \end{aligned} \quad (8)$$

Алгебраические соотношения (6), (8) всегда можно разрешить в аналогии с [1] относительно величин  $r(t)$ ,  $q$  и свести дифференциально-алгебраическую задачу к обычной дифференциальной задаче (возможно, неединственным способом).

В частности, в подклассе квадратичных по состоянию задач (функции  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $g(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\chi(x)$  квадратичны по  $x$ ) величины  $r(t)$ ,  $q$  могут быть представлены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t, v), v(t), t)(x(t, u^0) - x(t, v)), \\ q &= \frac{1}{2} (\varphi_{xx}(x(t_1, v)) + \lambda \chi_{xx}(x(t_1, v)))(x(t_1, u^0) - x(t_1, v)). \end{aligned}$$

Для управления  $u^0 \in V$  и фиксированного параметра проектирования  $\alpha > 0$  образуем аналогично [1] вектор-функцию

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U (u^0(t) + \alpha H_1(p, x, t)), \quad p \in R^n, \quad x \in R^n, \quad \alpha > 0, \quad t \in T,$$

где  $P_U$  – оператор проектирования на множество  $U$  в евклидовой норме.

Согласно известному свойству проекции имеет место оценка

$$\int_T \langle H_1(p, x, t), u^\alpha(p, x, t) - u^0(t) \rangle dt \geq \frac{1}{\alpha} \int_T \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (9)$$

Тогда из (4) и (9) следует оценка приращения функционала:

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (10)$$



Поставим задачу улучшения допустимого управления  $u^0 \in W$ : найти управление  $v \in W$  со свойством

$$\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0).$$

Можно показать, что для нелокального улучшения допустимого управления  $u^0 \in W$  достаточно решить при некотором  $\alpha > 0$  следующую систему функциональных уравнений в пространстве управлений:

$$\begin{aligned} v(t) &= u^\alpha(p(t, v, u^0, \lambda), x(t, u^0), t), t \in T, \lambda \in R, \\ \chi(x(t_1, v)) &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть управление  $v$  является решением системы (11). Нетрудно видеть, что  $v \in W$ . Тогда в силу оценки (10) имеет место улучшение целевого функционала  $\Phi_0$  с оценкой

$$\Delta_v \Phi_0(u^0) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt. \tag{12}$$

Из оценки (12) следует, что, если управление  $v$  отличается от управления  $u^0$ , то обеспечивается строгое улучшение целевого функционала.

Система уравнений (11) рассматривается как задача о неподвижной точке в пространстве управлений с дополнительным алгебраическим уравнением. Это позволяет применить и модифицировать известные итерационные методы неподвижных точек для решения системы (11).

**2. Итерационный метод.** Для решения системы (11) при фиксированном  $\alpha > 0$  предлагается следующая модификация известного алгоритма метода простой итерации [2] при  $k \geq 0$ :

$$\begin{aligned} v^{k+1}(t) &= u^\alpha(p(t, v^k, u^0, \lambda), x(t, u^0), t), t \in T, \lambda \in R, \\ \chi(x(t_1, v^{k+1})) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (13) выбирается управление  $v^0 \in V$ . Главной особенностью предлагаемого итерационного алгоритма является подбор параметра  $\lambda \in R$  на каждой итерации при  $k \geq 1$  для удовлетворения терминального ограничения. Предполагается, что такая возможность существует.

На каждой итерации процесса (13) после вычисления решения  $p^\lambda(t)$ ,  $t \in T$  задачи (5)–(8) при  $v = v^k(t)$  формируется вспомогательное управление

$$v^\lambda(t) = u^\alpha(p^\lambda(t), x(t, u^0), t), t \in T.$$

Для вспомогательного управления  $v^\lambda$  находится решение  $x(t, v^\lambda)$ ,  $t \in T$  стандартной задачи Коши

$$\dot{x} = A(x, t)v^\lambda(t) + b(x, t), t \in T, x(t_0) = x^0.$$

Значение множителя Лагранжа  $\lambda \in R$  на каждой итерации процесса (13) выбирается из условия выполнения терминального ограничения:

$$\chi(x(t_1, v^\lambda)) = 0. \tag{14}$$

Для полученного решения  $\bar{\lambda} \in R$  уравнения (14) определяется следующее приближение управления

$$v^{k+1}(t) = v^{\bar{\lambda}}(t), t \in T.$$

Особенностью предлагаемого итерационного алгоритма для решения задачи о неподвижной точке (11) является выполнение терминального ограничения (3) на каждой итерации процесса последовательных приближений управления. При этом начальное приближение  $v^0$  итерационного процесса (13) может не быть допустимым управлением, что является важным для практической реализации алгоритма.

Сходимость предлагаемого итерационного процесса регулируется выбором параметра проектирования  $\alpha > 0$  и может быть обоснована на основе метода возмущений и принципа сжимающих отображений аналогично [1] при достаточно малых значениях  $\alpha > 0$ .

Итерационный процесс (13) применяется до первого улучшения управления  $u^0$ . Далее строится новая задача улучшения для полученного управления и процесс повторяется. Критерием остановки итераций улучшения управления является отсутствие строгого улучшения управления по целевому функционалу.

На основе последовательного решения задач улучшения управления формируется соответствующий итерационный метод построения релаксационной последовательности управлений, удовлетворяющих терминальному ограничению.

**Заключение** Предлагаемый метод нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе нелинейных задач с ограничениями характеризуется следующими свойствами:

1. отсутствие трудоемкой процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов;
2. точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации последовательных приближений управления.

Точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации процесса дает возможность сузить область поиска управлений до множества допустимых управлений в отличие от стандартных методов Лагранжа, в которых поиск осуществляется одновременно и по множеству доступных управлений, и по множеству множителей Лагранжа. Методы штрафов в общем случае также не позволяют строить итерационный процесс на множестве допустимых управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями. Свойство допустимости управлений предлагаемого метода дает возможность эффективно получать приемлемые на практике управления по критерию оптимальности.

Указанные свойства являются важными факторами для повышения эффективности решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек на основе операции проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2017. 1. С. 38–54.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
3. Трунин Д. О. Проекционные методы улучшения управлений в нелинейных управляемых системах с терминальными ограничениями // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. 224. С. 142–149.

Трунин Дмитрий Олегович

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (БГУ)

E-mail: tdobsu@yandex.ru

Федоров Александр Юрьевич

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (БГУ)

E-mail: navi.818@yandex.ru



DETERMINATION THE RIGHT HAND SIDE  
OF THE LINEAR EQUATION OF OSCILLATIONS  
OF PLATE-LIKE CONSTRUCTIONS

© 2023 г. Н. Ф. ГУЛИЙЕВ, КН. И. СЕЙФУЛЛАЙЕВА

АННОТАЦИЯ. The paper deals with an inverse problem of determining the right-hand side of the linear equation of oscillations of plate-like constructions. The problem is reduced to the optimal control problem. Differentiability of the functional is studied and necessary and sufficient conditions of optimality are derived.

**Ключевые слова:** plate-like constructions, equation of vibrations, inverse problem, existence theorem, optimal control, optimality conditions.

**AMS Subject Classification:** 35L25, 49J20

It needs to find the pair of functions  $(u, v) \in W_2^1(Q) \times L_2(\Omega)$  from the relations

$$\frac{\rho}{G} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v(x, y) f(t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(a, y, t) = 0, u(x, b, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_0^T K(x, y, t) u(x, y, t) dt = \chi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (4)$$

Note that equation (1) is the equation of vibrations of a plate-like construction [1]. Where  $(x, y) \in \Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $a, b, T$  are given positive numbers,  $\rho(x, y)$  is a dense of the mass at the point  $(x, y)$ ,  $G$ - voltage,  $h(x, y)$  is the heath thickness of the plate in the point  $(x, y)$ ,  $u(x, y, t)$ - is deflection of the plate in the point  $(x, y)$  at the moment  $t$ ,  $f(t) \in L_2(0, T)$ ,  $\varphi_0(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1(x, y) \in L_2(\Omega)$  are given initial functions,  $K(x, y, t) \in L_\infty(Q)$ ,  $\chi(x, y) \in L_2(\Omega)$ -given function.

We'll consider the generalized solution of problem (1)–(3).

**Definition 1.** Under the generalized solution of the problem (1)–(3) corresponding to the admissible control  $v(x, y)$  we'll understand the function  $u(x, y, t) \in W_2^1(Q)$ , that satisfies to the integral identity

$$\begin{aligned} \int_Q \left( -\frac{\rho}{G} h \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy dt - \int_\Omega \frac{\rho}{G} h \varphi_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \\ = \int_Q v(x, y) f(t) \eta(x, y, t) dx dy dt \end{aligned} \quad (5)$$

for any  $\forall \eta(x, y, t) \in W_2^1(Q)$ , satisfying the conditions

$$\begin{aligned}\eta(0, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \\ \eta(a, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(a, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, b, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, b, t)}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Note, that the conditions (3) and  $u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$  are satisfied in the ordinary sense.

This problem we reduce to the following optimal control problem: to find the minimum of the functional

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \int_0^T K(x, y, t) u(x, y, T; v) dt - \chi(x, y) \right]^2 dx dy, \quad (6)$$

subject to (1)–(3). The function  $v(x, y)$  is called a control. By  $u = u(x, y, t; v)$  we denote the generalized solution of the problem (1)–(3) corresponding to the control  $v(x, y)$ . As a class of admissible controls  $U_{ad}$  we take convex closed set from  $L_2(\Omega)$ .

We regularize the problem (1)–(3), (6) by the following way: instead of the functional (6) consider the next one

$$J_{\alpha}(v) = J_0(v) + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (v(x, y) - \omega(x, y))^2 dx dy, \quad (7)$$

where  $\alpha > 0$  is a positive number,  $\omega(x, y) \in L_2(\Omega)$  is a given function.

In the work under consideration, the conditions imposed on these problems satisfy the conditions from the work [2]. Therefore the new optimal control problem (1)–(3), (7) has unique solution.

In this problem, the following existence theorem is proved:

**Theorem 1.** *Under the imposed conditions on the problem data, there exists an optimal control in problem (1)–(4).*

*Proof.* Let  $\{v_n(x, y)\} \in U_{ad}$  be a minimizing sequence, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

It is clear, that

$$\|v_n(x, y)\|_{L_2(\Omega)} \leq C. \quad (8)$$

Taking it into account, for solutions of problem (1)–(3) corresponding to  $v_n(x, y)$ , we obtain the estimation

$$\|u_n(x, y, t)\|_{W_2^1(Q)} \leq C. \quad (9)$$

By virtue of (8) and (9), it is possible to consider, that as  $n \rightarrow \infty$

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ weakly in } L_2(\Omega).$$

$$u_n \rightarrow u_0, \frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} \text{ weakly in } L_2(Q).$$

By virtue of compactness theorems, it follows that  $u_n \rightarrow u_0$  is strong in  $L_2(Q)$ .

Considering these relations, in the definition of the generalized solution for the problem (1)–(3), by  $v = v_n$ ,  $u = u_n$ , passing to limit as  $n \rightarrow \infty$  we have

$$\int_Q \left( -\frac{\rho}{G} h \frac{\partial u_0}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + h \frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy dt - \int_{\Omega} \frac{\rho}{G} h \varphi_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy =$$

$$= \int_Q v_0(x, y) f(t) \eta(x, y, t) dx dy dt.$$

Hence it follows, that  $u_0 = u(v_0)$ , i.e.  $u_0(x, y, t)$  is a generalized solution for the problem (1)–(3), corresponding to the control  $v_0(x, y)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \inf_{h \in U_{ad}} J(v) = J(v_0).$$

It shows, that  $v_0(x, y)$  provides the minimum to functional (7), i.e. is an optimal control. The theorem is proved.

Let us introduce the adjoint to (1)–(3), (7) problem for the given control  $v(x, y) \in L_2(\Omega)$ :

$$\frac{\rho}{G} h \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = K \left( \int_0^T K u dt - \chi \right), (x, y, t) \in Q,$$

$$\psi(x, y, T) = 0, \frac{\rho}{G} h \frac{\partial \psi(x, y, T)}{\partial t} = 0, (x, y) \in \Omega,$$

$$\psi(0, y, t) = 0, \quad \psi(a, y, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\psi(x, 0, t) = 0, \quad \psi(x, b, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t \leq T.$$

From the conditions imposed on the data of the problem (1)–(4) follows that this adjoint problem has unique generalized solution from the space  $W_2^1(Q)$ .

Then, the following theorem is proved:

**Theorem 2.** *Let the imposed on the data of the problem (1)–(3), (7) be fulfilled. Then for the optimality of the control  $v_*(x, y)$  in this problem it is necessary and sufficient fulfillment of the inequality*

$$\int_{\Omega} \left( \int_0^T \psi(x, y, t) f(t) dt + \alpha (v_0(x, y) - \omega(x, y)) \right) (v(x, y) - v_0(x, y)) dx dy \geq 0, \forall v \in U_{ad}.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arman J.-L.* Applications of the theory of optimal control of distributed-parameter systems to structural optimization (in Russian). M.: Mir, 1977. 144 pp.
2. *Lions J.-L.* Optimal control for the systems described by the partial differential equations (in Russian). M.: Mir, 1972. 416 pp.

Guliyev Hamlet Farman  
 Baku State University  
 E-mail: hamletguliyev51@gmail.com

Seyfullayeva Khayala Idris  
 Sumgayit State University  
 E-mail: xeyaleseyfullayeva82@gmail.com



## ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И ОБОБЩЕННЫЕ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ

© 2023 г. А. А. БАЛАГУРА, О. В. КУЗЬМИН

**Аннотация.** Построены частично упорядоченные множества, возникающие при обращении частных случаев обобщенной пирамиды Паскаля – А- и В-пирамид с помощью функции Мебиуса. С помощью этой техники получены пары обратимых соотношений, содержащих в качестве коэффициентов трехмерные комбинаторные числа. Построено частично упорядоченное множество деревьев, ранговопроизводящая функция которого имеет в качестве коэффициентов обобщенные расщепленные числа Шредера.

**Ключевые слова:** частично упорядоченное множество, обобщенная пирамида Паскаля, деревья.

**AMS Subject Classification:** 06A06, 05C05, 05C31, 05E05

**1. Введение.** Во втором параграфе вводятся базовые понятия и определения (см., например, [2, 6]). В третьем параграфе приведены обращения линейных соотношений, содержащих в качестве коэффициентов комбинаторные числа, описываемые обобщенной пирамидой Паскаля, полученные методом производящих функций в [5]. В четвертом параграфе построены частично упорядоченные (ч.у.) множества, возникающие при обращении частных случаев обобщенной пирамиды Паскаля – А- и В-пирамид с помощью функции Мебиуса. Получены аналоги комбинаторных тождеств из [5]. В пятом параграфе построено ч.у.м. деревьев, ранговопроизводящая функция которого имеющее в качестве коэффициентов обобщенные расщепленные числа Шредера, введенные в [1].

**2. Основные понятия.** Нам понадобятся следующие определения и обозначения (см., например, [3]).

Обобщенной пирамидой Паскаля называется [2] трехгранный пирамидальный массив, элементы которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V(n, k, l) = \alpha_{n,k-1,l}V(n-1, k-1, l) + \beta_{n,k,l-1}V(n-1, k, l-1) + \gamma_{n,k,l}V(n-1, k, l),$$

с граничными условиями  $V(0, 0, 0) = V_0$ ;  $V(n, k, l) = 0$ , если  $\min(n, k, l, n-k-l) < 0$ .

Следуя [2], рассмотрим важные частные случаи обобщенной пирамиды Паскаля – А- и В-пирамиды, в каждом сечении которых расположены обобщенные триномиальные коэффициенты второго и первого рода соответственно.

Пусть  $\alpha \sim \{\alpha_s\}_0^\infty$ ,  $\beta \sim \{\beta_s\}_0^\infty$ ,  $\gamma \sim \{\gamma_s\}_0^\infty$  – последовательности, которые назовем базовыми последовательностями или базами.

Обобщенные триномиальные коэффициенты первого и второго рода  $B_{k,l}^n$  и  $A_{k,l}^n$  соответственно, можно задать рекуррентными соотношениями:

$$B_{k,l}^n = \alpha_{n-1}B_{k-1,l}^{n-1} + \beta_{n-1}B_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_{n-1}B_{k,l}^{n-1},$$

$$A_{k,l}^n = \alpha_{k-1}A_{k-1,l}^{n-1} + \beta_k A_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_k A_{k,l}^{n-1},$$

$n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $0 \leq l \leq n-k$ , с начальными условиями  $B_{0,0}^0 = A_{0,0}^0 = 1$ ;  $B_{k,l}^n = A_{k,l}^n = 0$ , если  $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$ .

Парой обратимых соотношений называют [3] систему линейных соотношений:

$$F_n = \sum_k a_{nk} \cdot f_k, \quad n \geq 0,$$

$$f_n = \sum_k b_{nk} \cdot F_k, \quad n \geq 0$$

между членами последовательностей  $\{F_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ , если матрицы коэффициентов  $\|a_{nk}\|$  и  $\|b_{nk}\|$  – двусторонние взаимобратные.

**3. Обращение линейных соотношений.** Обозначим  $C_n(\alpha) = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ , аналогично определяются  $C_n(\beta)$  и  $C_n(\gamma)$ . Положим  $\frac{\alpha}{\beta} \sim \{\frac{\alpha_s}{\beta_s}\}_{s=0}^\infty$ , базы  $\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\beta+\gamma}$  определяются аналогично. Пусть  $\tilde{A}_{i,j}^r$  строятся на базах  $\alpha, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ ;  $\hat{A}_{i,j}^r$  – на базах  $\beta, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}$ ;  $\bar{A}_{i,j}^r$  – на базах  $\gamma, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}$ .

Нам понадобятся следующие теоремы, доказанные в [5].

**Теорема 1.** Система линейных выражений

$$\psi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^n \cdot \varphi_k, \quad n \geq 0, \quad \varphi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k} \cdot \tilde{A}_{k,l}^n \cdot \psi_k, \quad n \geq 0$$

образует пару обратимых соотношений.

**Теорема 2.** Система линейных выражений

$$\phi_n = \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} B_{k,l}^n \cdot \chi_l, \quad n \geq 0, \quad \chi_n = \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l} \cdot \hat{A}_{l,k}^n \cdot \phi_l, \quad n \geq 0$$

образует пару обратимых соотношений.

**Теорема 3.** Система линейных выражений

$$\xi_n = \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m B_{k,m-k}^n \cdot \zeta_{n-m}, \quad n \geq 0, \quad \zeta_n = \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^m \cdot \bar{A}_{n-m,m-k}^n \cdot \xi_{n-m}, \quad n \geq 0$$

образует пару обратимых соотношений.

**4. Частично упорядоченные множества.** Построим ч.у. множество и обратим линейные соотношения содержащее  $B_{k,l}^n$  используя функцию Мебиуса.

Пусть  $A_n = \{\frac{\beta_0+\gamma_0}{\alpha_0}, \dots, \frac{\beta_{n-1}+\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\}$ , конечное множество, элементы которого – вещественные числа. Рассмотрим множество  $G_n$  всех возможных произведений различных элементов множества  $A_n$ . На множестве  $G_n$  вводим частичную упорядоченность, считая, что  $x \leq y, x, y \in G_n$  если произведение  $y$  содержит каждый из сомножителей входящих в произведение  $x$ . Тогда  $G_n \cong B_n$ , где  $B_n$  – булева алгебра ранга  $n$ . Пусть  $n(x)$  число элементов  $\frac{\beta_i+\gamma_i}{\alpha_i}, i = \overline{0, n-1}$  соответственно в произведении  $x$  и  $\varphi_{n(x)}$  функция от этого числа. Построим функцию  $\psi(x)$  следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_{y \leq x} y \varphi_{n(y)}, \quad \forall x \in G_n.$$

Формула обращения Мебиуса [7] на  $G_n$  имеет вид:

$$x \varphi_{n(x)} = \sum_{y \leq x} \mu_{G_n}(y, x) \psi(y), \quad \forall x \in G_n.$$

Пусть  $\check{A}_{k,l}^n$  построены на базах  $\alpha, \frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\beta+\gamma}$ ;  $\psi(0) = \varphi_0, \psi(k) = \psi\left(\frac{\beta_{i_1}+\gamma_{i_1}}{\alpha_{i_1}} \cdot \frac{\beta_{i_2}+\gamma_{i_2}}{\alpha_{i_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\beta_{i_k}+\gamma_{i_k}}{\alpha_{i_k}}\right), k = \overline{1, n(x)}$ . Доказана следующая теорема.

**Теорема 4.**  $\forall x \in G_n$  последовательности  $\psi(x)$  и  $\varphi_{n(x)}$  образуют пару обратимых соотношений

$$\psi(x) = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n(x)} \sum_{l=0}^{n(x)-k} B_{k,l}^{n(x)} \cdot \varphi_{n(x)-k},$$

$$\varphi_{n(x)} = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n(x)} \sum_{l=0}^{n(x)-k} (-1)^{n(x)-k} C_k \left( \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \right) \cdot \check{A}_{k,l}^n \cdot \psi(k).$$

Полагая для элементов множества  $A_n$   $\alpha_i \equiv 1$ ,  $\beta_i = 0$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , получим ч.у. множество, построенное в [3], и из формул теоремы 4 – известные соотношения для обобщенных чисел Стирлинга первого и второго рода [2]. Задавая множество  $A_n = \left\{ \frac{\alpha_0 + \gamma_0}{\beta_0}, \dots, \frac{\alpha_{n-1} + \gamma_{n-1}}{\beta_{n-1}} \right\}$  и  $A_n = \left\{ \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\gamma_0}, \dots, \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \right\}$  получены аналоги теорем 2 и 3.

**5. Деревья.** Пусть  $n \geq 2$ ,  $2 \leq k \leq n$ . Обозначим  $D(n, k)$  – множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности  $n$  концевых вершин и  $k$  приемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин [1].

В [1] введены расщепленные обобщенные числа Шредера  $K_{nmk}$ , которые определяют число корневых деревьев с  $n$  концевыми вершинами по параметрам  $m$  – количеству внутренних вершин и  $k$  – количеству приемников корня.

Зададим на  $D(n, k)$  бинарное отношение  $\leq$ .  $\forall D_1, D_2 \in D(n, k)$  определим  $D_1 \leq D_2$  в одном из случаев:

- $D_1$  возможно получить из  $D_2$  соединением соседних внутренних вершин,
- $D_1$  возможно получить из  $D_2$  соединением соседних внутренних вершин и корня,
- $D_1$  и  $D_2$  с точностью до стандартной формы одинаковые [1].

Доказано, что множество  $D(n, k)$  вместе с бинарным отношением  $\leq$  образует частично упорядоченное множество. Ранговоспроизводящая функция  $(D(n, k), \leq)$  имеет вид:

$$F(D(n, k), q) = \sum_{i=0}^{n-k} K_{nik} q^i.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Балагура А. А., Кузьмин О. В. Перечислительные свойства комбинаторных полиномов // Дискретный анализ и исследование операций 2011. 18(1). С. 3–14.
- Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 2000. 294 с.
- Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. М. : Наука, 1979. 152 с.
- Balagura A. A., Kuzmin O. V. Encoding and decoding algorithms for unlabeled trees // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 1847(1). P. 012027.
- Balagura A. A., Kuzmin O. V. Generalised Pascal pyramids and their reciprocals // Discrete Mathematics and Applications. 2007. 17(6). P. 619–628.
- Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A. Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure // Advances and Applications in Discrete Mathematics. 2019. 20(2). P. 229-236.
- Stanley R. Enumerated combinatorics, Volume 2. Cambridge University Press, 2005. 767 pp.

Балагура Анна Александровна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: irk25@rambler.ru

Кузьмин Олег Викторович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: quzminov@mail.ru





## МНОГОАГЕНТНАЯ ЛОГИКА ДЕРЕВЬЕВ ВЫЧИСЛЕНИЙ $CTLK$

© 2023 г. С. И. БАШМАКОВ, К. А. СМЕЛЫХ

**Аннотация.** Рассматривается многоагентная логика деревьев вычислений, известная как  $CTLK$  (Computation Tree Logic with Knowledge). Каждый агент представляет свой собственный путь вычислений для исходной задачи, и каждое новое ветвление потенциальных путей порождает новых агентов. Логика  $CTLK$  является расширением  $CTL$  с дополнительными операторами знания. Предлагается альтернативная реляционная семантика для  $CTLK$ , основанная на автоматах. Также описываются свойства фреймов  $CTLK$  и доказывается финитная аппроксимируемость.

**Ключевые слова:** многоагентная логика, ветвящаяся временная логика, реляционная семантика Крипке, метод фильтрации, финитная аппроксимируемость.

**AMS Subject Classification:** 03B44

**1. Введение.** Сочетание временных логик и логики знания представляет собой эффективный инструмент для формальной проверки программных систем с несколькими агентами. Это позволяет создавать модели различных сценариев взаимодействия агентов и проверять соответствующие свойства системы, что потенциально способно значительно улучшить качество и надежность программного обеспечения [4].

Разные подходы к интерпретации внутренних свойств временных процессов и процессов сохранения и передачи данных привели к возникновению обширной области исследований [2, 5]. В статье [6] представлена классификация этих логик на основе используемого языка и требований к системе, для которой эти логики предназначены. Свойства *знаний* в каждой такой системе тесно связаны с этими предположениями. Наибольший интерес для исследования представляет широкий прикладной потенциал временных логик знания, которые обычно определяются с использованием автоматной или реляционной семантики.

Логика деревьев вычислений  $CTL$ , а также ветвящаяся временная логика  $BTL$  (Branching-time logic) [3], представляют собой разновидности временной логики, которая используется для описания систем, где вычислительный процесс развивается во времени с возможностью ветвления и выбора альтернативных путей развития. Обычно  $CTL$  имеет семантику бесконечных недетерминированных автоматов, которые графически представляются в виде древовидной структуры, где каждая ветвь представляет собой альтернативный вычислительный путь или маршрут. Фактически, дерево вычислений описывает все возможные способы реализации вычислительного процесса. Для каждой задачи, где решение представлено некоторым деревом вычислений, существует эквивалентная реляционная модель, которая также включает все возможные вычислительные альтернативы и может быть как конечной, так и потенциально бесконечной на каждом маршруте. Логика  $CTL$  позволяет выражать различные свойства системы, такие как корректность, безопасность и логическую эквивалентность. Она используется для формальной верификации программных систем и обеспечения их надежности и безопасности [1].

При добавлении операторов знания в язык логики  $CTL$  получается логика  $CTLK$ , которая, как показано в [6], полностью наследует структуру недетерминированных автоматов, характеризующих  $CTL$ . Вычислительные маршруты в  $CTLK$  получают агентную интерпретацию: каждое новое ветвление, возникающее в любой момент времени в процессе вычислений, порождает нового агента. Каждый агент представляет собой держателя своего собственного вычислительного

---

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

маршрута внутри модели, то есть определенной последовательности вычислений. Агент знает только то, что происходит в его временном маршруте и не имеет доступа к информации, доступной другим агентам, за исключением общих участков маршрута. Если возможное число ветвлений модели не определено заранее, количество агентов в системе может быть потенциально счетным.

Нами предложена альтернативная заданной ранее семантике недетерминированных автоматов – реляционная семантика, позволившая характеризовать исследуемую логическую систему. Описаны и доказаны свойства таких моделей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карпов Ю. Г.* Model Checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб. : БХВ-Петербург. 560 с.
2. *Bashmakov S. I., Zvereva T. Yu.* Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality // Bulletin of the Section of Logic. 51, № 3. С. 345–361
3. *Clarke E. M., Emerson E. A.* Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic // Workshop on logic of programs. Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. С. 52–71
4. *Dima C.* Revisiting satisfiability and model-checking for CTLK with synchrony and perfect recall // Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems. Springer, Berlin, Heidelberg. С. 117–131
5. *Guelev D. P., Dima C., Enea C.* An alternating-time temporal logic with knowledge, perfect recall and past: axiomatisation and model-checking // Journal of Applied Non-Classical Logics.. 21, № 1. С. 93–131
6. *Halpern J. Y., Vardi M. Y.* The complexity of reasoning about knowledge and time. I. Lower bounds // Computer and System Sciences.. 38, № 1. С. 195–237

Башмаков Степан Игоревич  
Сибирский федеральный университет (СФУ)  
E-mail: krauder@mail.ru

Смелых Кирилл Александрович  
Сибирский федеральный университет (СФУ)  
E-mail: lastth@yandex.ru



## КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

© 2023 г. Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ

**Аннотация.** Рассматриваются прямые разложения абелевых групп без кручения конечного ранга специального вида, обладающие неизоморфными прямыми разложениями. С применением комбинаторного подхода формулируются характеристики прямых разложений на языке инвариантов группы и условия, при которых вполне характеристические подгруппы исходной группы стабильно присутствуют во всех ее возможных прямых разложениях.

**Ключевые слова:** абелевы группы без кручения, ранг группы, прямые разложения.

**AMS Subject Classification:** 08A05, 05A17

**1. Основные понятия.** Все необходимые определения, понятия и обозначения содержатся в [1].

Натуральное число  $n$  называется *рангом* абелевой группы без кручения  $X$ , если оно является мощностью ее максимальной линейно независимой системы. Ранг группы  $X$  обозначается  $rkX$ . Любая прямая сумма групп ранга 1 называется вполне разложимой группой.

Если  $V$  является подгруппой в  $X$  (возможно,  $V = X$ ), пишем  $V \subset X$ , и  $V_*^X = \{g \in X : \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$  обозначает *сервантную оболочку*  $V$  в  $X$ . Подгруппа  $V$  называется *сервантной* подгруппой в  $X$ , если  $V_*^X = V$ .

Абелева группа без кручения  $X$  конечного ранга  $n$  определяется с точностью до изоморфизма как подгруппа группы  $\mathbb{Q}^n$  (то есть подгруппа конечной прямой суммы групп, изоморфных аддитивной группе  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел). Несмотря на это естественное определение, структура таких групп весьма сложна, в основном, из-за наличия неизоморфных прямых разложений на неразложимые подгруппы.

Очевидно, что произвольная абелева группа без кручения  $X$  содержит (не единственную с точностью до изоморфизма) вполне разложимую подгруппу  $A$  того же ранга, что и  $X$ , так что для любого элемента  $x \in X$  существует натуральное число  $k$ , удовлетворяющее условию  $kx \in A$ . Пусть  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$  – разложение  $A$  на прямые слагаемые ранга 1. Не умаляя общности, предположим, что все  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , сервантны в  $X$ .

Условие  $rkA = rkX$  обеспечивает то, что фактор-группа  $X/A$  состоит из элементов конечного порядка и не является ограниченной в общем случае. Требование конечности группы  $X/A$  привело к возникновению нового класса так называемых почти вполне разложимая групп.

Почти вполне разложимая группа  $X$  – это абелева группа без кручения конечного ранга, содержащая вполне разложимую вполне характеристическую подгруппу  $A$ , так что  $X/A$  – конечная группа.

Если, к тому же,  $X/A$  – циклическая группа, то  $X$  называется sq-группой с регулятором  $A$  (то есть почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором).

Вполне разложимая группа  $A$  является прямой суммой своих  $\tau$ -однородных компонент  $A(\tau)$ , где  $A(\tau) \cong n_\tau \tau$  (прямая сумма  $n_\tau$  копий группы  $\tau$ , где  $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$ , то есть  $A = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} A(\tau)$ ) и  $n = rkX = rkA = \sum_{\tau \in T_{cr}(A)} n_\tau$ . Предполагается, что множество  $T_{cr}(A)$  критических типов группы  $A$  состоит из попарно несравнимых типов, которые можно рассматривать как подкольца в  $\mathbb{Q}$ , содержащие  $\mathbb{Z}$ . Тогда группы  $A$  и  $X$  называются блочно-жесткими (или жесткими, если  $rkA(\tau) = 1$  для всех  $\tau$ ).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00267).

**2. Классификация и прямые разложения.** Рассматриваются блочно-жесткие  $\text{sqc}$ -группы с регулятором  $A$ , для которых разработана комбинаторная теория прямых разложений. Обозначим  $T = T_{cr}(A)$ .

Пусть  $X = \langle A, b \rangle$  где  $A$  – регулятор в  $X$  и  $b \in X$  – элемент, удовлетворяющий условию  $eb = a$  для некоторого  $a \in A$ , то есть  $b + A$  – образующий элемент циклической группы  $X/A$ , тогда  $eb = \sum_{\tau \in T} v_\tau$  представляется в виде суммы слагаемых  $v_\tau \in A(\tau)$ . Пусть  $\bar{\cdot} : A \mapsto A/eA = \bar{A}$  обозначает естественный эпиморфизм. Введем в рассмотрение числа  $m_\tau = m_\tau(X) = |\bar{v}_\tau| = |v_\tau + eA|$  (если  $\tau \notin T_{cr}(X)$ , полагаем  $m_\tau = 1$ ). Заметим, что так определенные числа  $m_\tau$ ,  $\tau \in T_{cr}(X)$ , не зависят от выбора элемента  $b$ , потому являются инвариантами группы  $X$ . Предполагается, что число  $e$  свободно от квадратов и любой его простой делитель является делителем ровно двух инвариантов группы  $X$ .

Для классификации абелевых групп без кручения конечного ранга и их прямых разложений используется понятие почти изоморфизма (обозн.  $\cong_{nr}$ ), эквивалентности, которая слабее, чем изоморфизм ( $\cong$ ), но при этом достаточно точно отражает свойства прямых разложений, а именно, если  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k = X \cong_{nr} Y$ , то существует разложение  $Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_k$ , такое что  $X_i \cong_{nr} Y_i$  для всех  $i$ .

**Теорема 1** (Критерий почти изоморфизма  $\text{sqc}$ -групп). *Пусть  $X$  и  $Y$  – блочно-жесткие  $\text{sqc}$ -группы с регулятором  $A$ . Тогда  $X \cong_{nr} Y$  тогда и только тогда, когда  $m_\tau(X) = m_\tau(Y)$  для всех типов  $\tau \in T$ .*

**Теорема 2** (Комбинаторный подход к реализации прямых разложений  $\text{sqc}$ -групп). *Пусть  $X$  – блочно-жесткая  $\text{sqc}$ -группа кольцевого типа. Если  $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_t \oplus X_{t+1}$ , где  $X_{t+1}$  – вполне разложима ( $rk X_{t+1} \geq 0$ ), при этом  $X_i$  – жесткие неразложимые  $\text{sqc}$ -группы с инвариантами  $m_{\tau_i} = m_\tau(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, t$ , тогда для всех типов  $\tau$  выполнены следующие условия:*

1)  $m_\tau(X) = \prod_{i=1}^t m_{\tau_i}$ , где  $m_{\tau_i}$  и  $m_{\sigma_j}$  – взаимно простые числа при  $i \neq j$ ;

2)  $|\{i : m_{\tau_i} > 1\}| \leq rk(X(\tau))$ ;

3) для всех  $i = 1, \dots, t$  не существует разбиения  $T_{cr}(X_i) = T_1^i \cup T_2^i$  такого, что  $GCD(m_{\sigma_i}, m_{\tau_i}) = 1$ , если  $\sigma \in T_1^i$  и  $\tau \in T_2^i$ .

В построении  $\text{sqc}$ -групп с заранее определенными свойствами прямых разложений большую роль играют так называемые "стабильные подгруппы", каждая из которых, с точностью до почти изоморфизма, присутствует в качестве вполне характеристической подгруппы какого-либо неразложимого слагаемого для любого возможного прямого разложения исходной группы. Имеется характеристика максимальных стабильных подгрупп, применяемых в теории различных многослойных систем:

**Теорема 3** (О максимальных стабильных подгруппах  $\text{sqc}$ -групп). *Пусть  $X$  – блочно-жесткая  $\text{sqc}$ -группа с регулятором  $A$ . Пусть  $W = (\bigoplus_{\tau \in T'} A(\tau))^*{}^X$  для некоторого  $T' \subset T_{cr}(A)$ , и в разложении  $W = G \oplus H$  подгруппа  $G$  – жесткая, удовлетворяющая условиям:  $T_{cr}(G) = T_{cr}(W)$  и  $m_\tau(G) = m_\tau(W)$  для всех  $\tau$ . Тогда  $G$  является максимальной стабильной подгруппой группы  $X$ , если  $T' = T_{cr}(G)$  – максимальное подмножество в  $T_{cr}(A)$ , удовлетворяющее условиям:*

1) для любого разбиения  $T' = T'_1 \cup T'_2$  выполнено, что  $GCD(m_\sigma(X), m_\tau(X)) \neq 1$ , если  $\sigma \in T'_1$  и  $\tau \in T'_2$ ;

2) если  $GCD(m_\sigma(X), m_\tau(X)) \neq 1$ , то  $rk A(\tau) = 1$  или  $rk A(\sigma) = 1$  (или  $rk A(\tau) = rk A(\sigma) = 1$ );

3) для множества  $T_0 = \{\tau \in T' : rk A(\tau) = 1\}$ , входящего в  $T'$ , выполнено условие, аналогичное условию 1) для всего множества  $T'$ , а именно: при любом разбиении  $T_0 = T_1 \cup T_2$  верно, что  $GCD(m_\sigma(X), m_\tau(X)) \neq 1$ , если  $\sigma \in T_1$  и  $\tau \in T_2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благовещенская Е. А., Михалёв А. В. Влияние теоремы Бэра – Капланского на развитие теории групп, колец и модулей // *Фундаментальная и прикладная математика* 2022. 24, № 1. С. 31–123.

Благовещенская Екатерина Анатольевна

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ПГУПС)

E-mail: kblag2002@yahoo.com



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕСТОВ В LMS MOODLE КАК ИНСТРУМЕНТ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ В УНИВЕРСИТЕТЕ

© 2023 г. В. С. ЗАХАРЧЕНКО, Т. Г. ТЮРНЕВА

**Аннотация.** Рассматривается возможность применения технологии, в которой тестирование выступает инструментом диагностики, обучения и формирования у студентов необходимых компетенций. В этом случае насущной оказывается задача моделирования тестов, удовлетворяющих определённым характеристикам. Приводится пример эффективного использования возможностей системы LMS Moodle для анализа качества тестовых заданий.

**Ключевые слова:** тестирование, тестовые задания, критерии качества, статистические характеристики, диагностика, образовательный процесс.

**AMS Subject Classification:** 97PM10, 97U50

**1. Моделирование теста с заданными свойствами.** Использование в учебном процессе университета системы LMS Moodle позволяет создавать технологию, в которой тестирование выступает не только средством выявления и оценки уровня учебных достижений, но и как инструмент обучения и формирования заданных компетенций.

При этом важнейшими требованиями, предъявляемыми к тестовым материалам, являются точность оценки выбранного параметра и объективность получаемых выводов. Очевидно, что для создания качественных технологий необходимо применять специальные методики, а сами тесты должны отвечать определённым статистическим характеристикам.

Существует несколько статистических теорий (СТ), применяя которые можно обосновывать качество моделируемых тестов. Аппарат современной теории тестов (Item Response Theory) обычно применяется для больших выборок испытуемых (более 1000 человек на вариант) и требует значительных трудозатрат при обработке и интерпретации данных для коррекции тестов. Согласно этой теории, вероятность правильного ответа испытуемого на задание теста рассматривается как функция, зависящая от латентных параметров: уровня подготовленности испытуемого и меры трудности задания. Значительно чаще используют классическую теорию (СТ), особенно при небольших выборках в 50–100 человек на каждый вариант теста. Расширенный вариант этой теории реализован в LMS Moodle.

LMS Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) – модульная объектно-ориентированная динамическая учебная среда, распространяемая как программное обеспечение с открытым кодом, позволяет создавать тест с заданными характеристиками. При моделировании такого теста контроль качества ведётся с помощью целого ряда статистических показателей по каждому заданию в отдельности и по их совокупности.

**2. Критерии качества тестовых заданий.** В предыдущем исследовании авторов [4] была рассмотрена задача: влияет ли результат контрольного теста на успешность сдачи экзамена по дисциплине? Для оценки тесноты связи между экзаменационной оценкой и тестовым баллом пятидесяти студентов вычислен точечный бисериальный коэффициент корреляции, значение которого подтверждает наличие статистически значимой связи между анализируемыми показателями. Однако, большая вариабельность тестового балла в группах студентов, получивших

«удовлетворительно» и «хорошо» на экзамене позволили предположить, что некоторые вопросы контрольного теста нуждаются в корректировке или, даже, замене.

Рассмотрим на примере различные показатели, позволяющие оценить качество тестовых заданий. В Таблице 1 приведены показатели, полученные при реальном контрольном тестировании студентов ИМИТ по конкретной дисциплине.

ТАБЛИЦА 1. Показатели контрольных тестирований по дисциплине «Алгебра», проведенные в весеннем семестре 2022-23 уч.г. в ИМИТ ИГУ

Тестирование	Результаты до коррекции вопросов теста	Результаты после коррекции вопросов теста
Средняя оценка	61	52
Медиана оценок	62	54
Стандартное отклонение	16	10
Оценка асимметрии распределения	-0.05	0.1
Оценка распределения эксцесса	0.12	0.02
<b>Статистика вопросов теста</b>		
Коэффициент внутренней согласованности	58	89
Стандартная ошибка	10	5
% заданий, индекс лёгкости которых выше 80%	17	0
% заданий, стандартное отклонение которых ниже 30%	0	0
% заданий, индекс дискриминации которых меньше или равен 30%	30	0

Анализ значений, приведенных в таблице, позволяет сделать следующие выводы:

- в первую очередь необходимо обращать внимание на информацию о качестве и валидности тестовых вопросов;

- если коэффициент надежности ниже 70%, то надежность теста считается неудовлетворительной и некоторые тестовые материалы необходимо заменить;

- следует исключить вопросы, не обладающие достаточной дифференцирующей способностью;

- не имеет смысла использовать результаты тестовых испытаний для оценки уровня подготовленности студента, если диагностические материалы не удовлетворяют заданной надежности.

В заключении стоит отметить, что пятибалльная шкала оценки знаний обучаемого, применяемая в настоящее время в России, безусловно, проста и привычна, но имеет и существенные недостатки [3]. Тесты, обладающие высокими валидностью и надежностью, позволяют повысить эффективность диагностики учебного процесса, реализовать качественный педагогический контроль, построить алгоритм индивидуальной образовательной траектории обучения. Для решения проблемы качества контрольно-измерительных материалов тестирования, конечно, можно использовать соответствующую информацию, которую представляет LMS Moodle, но для оценки надежности тестов при оценке знаний обучаемых нашли широкое применение и другие методы и модели. Широко используются ретестовый метод, метод параллельных форм, метод расщепления теста [2], однопараметрическая модель Г.Раша [1] и др.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунова Л. Г. Проблема качества контрольно-измерительных материалов педагогического тестирования // Человек и образование (Академический вестник Института образования взрослых Российской академии образования). 2009. № 3. С. 204–208.
2. Мороз Л. С. Методы определения надежности и валидности тестов для контроля знаний // Труды БГТУ. Серия 3, Физико-математические науки и информатика 2010. № 6. С. 176–179.

3. Романов В. П., Соколова Н. А. Вероятностно-статистический метод психолого-педагогических исследований. М. : Ладомир, 2012. 144 с.
4. Тюрнева Т. Г., Захарченко В. С. Опыт использования тестовых материалов при обучении математическим дисциплинам в вузе // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. 2022. № 25. С. 108–116.

Захарченко Варвара Сергеевна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [varvaraz@bk.ru](mailto:varvaraz@bk.ru)

Тюрнева Татьяна Геннадьевна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [ttg51@rambler.ru](mailto:ttg51@rambler.ru)



## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СТРОК ПО ЗАДАННОМУ РЕГУЛЯРНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ

© 2023 г. К. Д. КИРИЧЕНКО, Э. П. ТКАЧЕНКО

**Аннотация.** Рассматривается алгоритм построения случайных символьных последовательностей по регулярному выражению, заданному с использованием стандартных регулярных операций и интервального квантификатора. Данный алгоритм может использоваться при тестировании производительности методов для поиска и преобразования текстовой информации.

**Ключевые слова:** конечные автоматы, регулярные выражения, случайные строки.

**AMS Subject Classification:** 68R05, 68W20

**1. Конечные автоматы и регулярные выражения.** Теория конечных автоматов начала разрабатываться в сороковых годах прошлого века как инструмент для моделирования в различных областях науки, в первую очередь в биологии. Десятилетием позже понятие автомата стало одним из фундаментальных в области информационных технологий и остается им до сих пор. Важной прикладной областью применения конечных автоматов является их использование для задания языков, как множеств слов над некоторым конечным алфавитом [2].

Существует определение конечного автомата, как алгебраической системы, однако, здесь мы будем считать, что конечный автомат – это ориентированный граф с разметкой на ребрах. Каждое ребро помечается одним произвольным символом из заданного алфавита терминальных (входных) символов, либо особым символом  $\epsilon$ , обозначающим пустое слово. Кроме того, в графе выделяется две вершины: исток и сток, – причем, не существует ребер, ведущих в исток, и не существует ребер, выходящих из стока.

Рассмотрим множество путей из истока в сток. В общем случае это множество счетной мощности. Каждому пути можно поставить в соответствие некоторое слово над алфавитом терминальных символов. Для этого последовательно запишем все символы, кроме  $\epsilon$ , из пометок ребер, входящих в путь. Множество полученных таким образом слов называется языком, порожденным автоматом. Язык называется регулярным, если он может быть порожден некоторым автоматом. Два автомата называют эквивалентными, если они порождают один и тот же язык.

Основные результаты в области регулярных языков были получены С. К. Клини в пятидесятых годах прошлого века. Рассмотрим класс элементарных автоматов, которые содержат две вершины (исток и сток) и одно ребро от истока к стоку. Такой автомат можно обозначить одним символом из пометки ребра. Далее определим три операции над автоматами (и языками): конкатенация, объединение и замыкание.

Клини доказал, что для любого конечного автомата можно построить эквивалентный конечный автомат, применяя три указанных операции к классу элементарных автоматов [3]. Таким образом, стало возможно записывать фактически произвольные конечные автоматы в виде алгебраических выражений с использованием символов терминального алфавита, операторов и скобок. Полученные выражения получили название регулярных выражений.

В большинстве приложений регулярные выражения используются для поиска заданных фрагментов в тексте с их последующим преобразованием. Таким образом, на вход алгоритму, который называют парсером, поступает регулярное выражение и некоторая символьная строка. Парсер создает разметку строки в соответствии с регулярным выражением. Существует два основных способа разработки парсеров: ДКА, основанный на технике динамического программирования,



и НКА, реализующий метод перебора с возвратами. По ряду причин в большинстве случаев используется метод НКА. При этом программист должен избегать угрозы комбинаторного взрыва сложности вычислений путем правильного проектирования регулярного выражения [1].

В ходе работы метод НКА хранит цепочку пройденных состояний конечного автомата. На каждом шаге метод рассматривает последнее состояние в цепочке и последовательно проверяет все ребра, выходящие из него. Переход возможен, если текущий символ разбираемой строки совпадает с символом, которым помечено ребро. Таким образом, можно сказать, что для каждого ребра вычисляется определенный логический предикат, и в случае его истинности происходит переход.

Это наблюдение позволяет нам существенно расширить определение автомата, используя для разметки ребер не одиночный символ, а некоторый произвольный предикат, возможно, из определенного заранее класса. Таким образом, метод НКА позволяет вводить в синтаксис регулярных выражений новые операции, в том числе даже выходящие за рамки математической теории регулярных языков. Поэтому регулярные выражения, используемые в программировании могут содержать операции, которые в общем случае не являются регулярными с точки зрения математической теории, то есть для языка, порожденного таким регулярным выражением будет невозможно построить классический конечный автомат.

**2. Построение случайных строк по регулярному выражению.** При тестировании программ, предназначенных для обработки строк, возникает задача подготовки набора тестов. Поскольку тестирование включает в себя также проверку производительности, часть тестов должна иметь достаточно большую длину. Построение таких тестов может оказаться весьма трудоемким, поэтому может оказаться полезной автоматическая генерация случайных тестов по заданному шаблону, который представляется в виде регулярного выражения. Для генератора тестов указывается требуемая длина тестовых строк и регулярное выражение для их построения.

Логичным выглядит требование о равномерной случайности выбора тестовой строки из множества всех возможных строк. Однако, осуществить его в таком виде оказалось слишком сложно, поэтому вероятность получения некоторого слова  $\beta$  определялась по формуле

$$P(\beta) = \frac{\nu(\beta)}{\sum_{\alpha \in A^n} \nu(\alpha)}$$

Здесь  $\nu(\beta)$  – количество способов разметить слово  $\beta$  по заданному регулярному выражению. Для регулярных выражений, транслируемых в конечные автоматы  $\nu(\beta)$  – количество путей в графе, соответствующих  $\beta$ . Если каждое возможное слово может быть получено единственным способом, то распределение вероятностей будет равномерным.

При построении выражений для генератора случайных тестов можно использовать все стандартные регулярные операции, а также условно регулярный интервальный квантификатор повторения  $\alpha\{a, b\}$ , который задает конкатенацию не менее  $a$  и не более  $b$  слов из языка для выражения  $\alpha$ . В принципе эта операция может быть выражена через объединение и конкатенацию регулярных языков, что позволяет построить для этого выражения конечный автомат, однако, при больших значениях  $a$  и  $b$  такой автомат получится слишком громоздким, поэтому на практике реализовать эту операцию как регулярную не получается.

Генерация случайных строк проводится в два этапа. На первом этапе происходит вычисление значений  $c(\alpha, i)$  – количество слов длины  $i$ , принадлежащих языку регулярного выражения  $\alpha$ . Тогда определим  $f(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} c(\alpha, i)z^i$  – производящую функцию для ряда  $c(\alpha, i)$ . Для регулярных операций объединения, конкатенации и замыкания легко получить следующие формулы.

$$\begin{aligned} f(\alpha|\beta) &= f(\alpha) + f(\beta) \\ f(\alpha\beta) &= f(\alpha) \cdot f(\beta) \\ f(\alpha^*) &= \sum_{i=0}^{\infty} f(\alpha)^i = \frac{1}{1 - f(\alpha)} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + f(\alpha)^{2^i}) \end{aligned}$$

Наибольшую сложность представляет нахождение производящей функции для интервального квантификатора, поскольку естественная формула

$$f(\alpha\{a, b\}) = \sum_{i=a}^b f(\alpha)^i = \frac{f(\alpha)^a - f(\alpha)^{b+1}}{1 - f(\alpha)}$$

приводит к слишком громоздким вычислениям.

В связи с этим выполнялась декомпозиция  $\alpha\{a, b\}$  с использованием операций объединения, конкатенации и операции декартового квадрата  $\alpha\{2\} = \alpha \cdot \alpha$ . Количество операций в декомпозиции в худшем случае линейно зависит от  $\log b$ .

На втором этапе происходит рекурсивный спуск от всего выражения к подвыражениям с учетом количества слов в языках для подвыражений. Например, при построении случайного слова длины  $k$  по выражению  $\alpha|\beta$  подвыражение  $\alpha$  выбирается с вероятностью  $c(\alpha, k)/(c(\alpha|\beta, k))$ .

Для операции конкатенации аналогичным образом выбираются длины объединяемых слов, для итерации или замыкания – количество повторов.

В результате на языке Java был написан и протестирован прототип программы, который показал требуемую эффективность. Сложность алгоритма на первом этапе можно оценить как  $O(mn \log^2 n)$ , где  $m$  – количество операций в выражении, а  $n$  – длина генерируемой строки. Сама генерация случайной строки на втором этапе имеет максимальную сложность  $O(mn)$ , однако, в большинстве случаев работает быстрее.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фрида Дж.* Регулярные выражения : пер. с англ. 3-е изд. СПб. : Символ-Плюс, 2008. 608 с.
2. *Constable Robert L.* The Role of Finite Automata in the Development of Modern Computing Theory // The Kleene Symposium. North-Holland Publishing Company, 1980. P. 61–83.
3. *Kleene S. C.* Automata Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1956.

Кириченко Константин Дмитриевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: constkir@gmail.com

Ткаченко Эвелина Павловна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)



## КОМПОЗИЦИИ ЧИСЕЛ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ

© 2023 г. О. В. КУЗЬМИН, М. В. СТРИХАРЬ

**Аннотация.** Изучаются композиции натуральных чисел с ограничениями на значения натуральных частей и их взаимосвязь с комбинаторными объектами иерархической структуры. Выведена формула для подсчета числа таких композиций с тремя ограничениями на основе сумм элементов плоских сечений пирамиды Паскаля. Получены рекуррентные соотношения и производящие функции числа композиций, и рассмотрены некоторые наиболее важные частные случаи на примере известных комбинаторных чисел.

**Ключевые слова:** композиция числа, иерархическая структура, пирамида Паскаля, треугольник Паскаля, рекуррентное соотношение, производящая функция, числа Трибоначчи, числа Фибоначчи.

**AMS Subject Classification:** 05A05, 11B75, 11B39, 11P81

**1. Введение.** В комбинаторике и теории чисел композицией натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы других натуральных чисел [5]. Слагаемые, входящие в композицию, называются частями, а их количество – длиной композиции. Если ограничений на величину частей нет, то для числа  $n$  существует  $2^{n-1}$  композиций, из которых  $\binom{n-1}{k-1}$  композиций имеют длину  $k$ , где числа  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  являются биномиальными коэффициентами.

В данной работе будем рассматривать композиции натурального числа  $m$  с ограничениями на значения натуральных частей  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , где  $0 < m_1 < m_2 < m_3 \leq m$ , то есть любое слагаемое исследуемой композиции является либо числом  $m_1$ , либо числом  $m_2$ , либо числом  $m_3$ , каждое из которых положительно, строго больше предыдущего и не превосходит самого числа  $m$ . Не умоляя общности рассматриваемых случаев, далее положим, что  $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$ .

Пирамидой Паскаля [3] называется бесконечная иерархическая трехгранная пирамидальная структура, элементы которой для целых неотрицательных  $n, k, l$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k, l} = \binom{n}{k-1, l} + \binom{n}{k, l-1} + \binom{n}{k, l},$$

с граничными условиями  $\binom{0}{0,0} = 1$ ;  $\binom{n}{k, l} = 0$ , если  $\min(n, k, l, n-k-l) < 0$ , где величины  $\binom{n}{k, l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$  являются триномиальными коэффициентами.

Важным частным случаем пирамиды Паскаля является треугольник Паскаля, определяемый, как бесконечная иерархическая треугольная структура, элементы которой для целых неотрицательных  $n, k$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

с граничными условиями  $\binom{0}{0} = 1$ ;  $\binom{n}{k} = 0$ , если  $\min(n, k, n-k) < 0$ .

**2. Число композиций с тремя ограничениями.** Введем в рассмотрение сумму элементов  $m$ -го плоского сечения [4] пирамиды Паскаля следующего вида

$$S_m \left( \frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{m_1} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{m_2} \rfloor} \binom{\frac{m}{m_3} - \left( \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left( \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j}{i, j}, \quad m \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Число различных композиций натурального числа  $m$  с ограничениями на значения натуральных частей  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , где  $0 < m_1 < m_2 < m_3 \leq m$ ,  $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$ , равно сумме элементов  $m$ -го плоского сечения пирамиды Паскаля вида (1).

Доказательство. Обозначим через  $x_{i,j}$  количество различных композиций числа  $m$ , состоящих из  $i$  частей вида  $m_1$ ,  $j$  частей вида  $m_2$  и соответственно  $(m - m_1 i - m_2 j)/m_3$  частей вида  $m_3$ :

$$m = \underbrace{m_1 + m_1 + \dots + m_1}_i + \underbrace{m_2 + m_2 + \dots + m_2}_j + \underbrace{m_3 + m_3 + \dots + m_3}_{(m - m_1 i - m_2 j)/m_3}.$$

Поскольку длины таких композиций будут равны

$$i + j + \frac{m - m_1 i - m_2 j}{m_3} = \frac{m}{m_3} - \left( \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left( \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j,$$

имеем

$$x_{i,j} = \frac{\left( \frac{m}{m_3} - \left( \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left( \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j \right)!}{i! j! \left( \frac{m}{m_3} - \frac{m_1}{m_3} i - \frac{m_2}{m_3} j \right)!} = \binom{\frac{m}{m_3} - \left( \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left( \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j}{i, j}.$$

Таким образом, общее число различных композиций натурального числа  $m$  с ограничениями на значения натуральных частей  $m_1, m_2$  и  $m_3$  равно

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{m_1} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{m_2} \rfloor} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{m_1} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{m_2} \rfloor} \binom{\frac{m}{m_3} - \left( \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left( \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j}{i, j} = S_m \left( \frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right),$$

что и требовалось доказать.

**3. Рекуррентное соотношение.** Обозначим  $S_m = S_m \left( \frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right)$  и рассмотрим последовательность  $\{S_m\}$ ,  $m \in \mathbf{N}$  композиций натурального числа  $m$  с ограничениями на значения натуральных частей  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , где  $0 < m_1 < m_2 < m_3 \leq m$ ,  $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$ .

**Теорема 2.** Последовательность чисел  $\{S_m\}$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + S_{m-m_3} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{m_1-1} = 0; \quad (3)$$

$S_m$ , при  $m = m_1, \dots, m_{m_2-1}$  задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}, \quad (4)$$

$S_m$ , при  $m = m_2, \dots, m_{m_3-1}$  задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}. \quad (5)$$

Доказательство. Действительно, имеются только три возможности для того, чтобы составить композицию числа  $m$  из частей  $m_1, m_2$  и  $m_3$ . В первом случае можно сначала составить композицию числа  $(m - m_1)$  при помощи чисел  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , а затем добавить в сумму справа число  $m_1$ . Во втором случае можно сначала составить композицию числа  $(m - m_2)$  при помощи чисел  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , а затем добавить в сумму справа число  $m_2$ . В третьем случае можно сначала составить композицию числа  $(m - m_3)$  при помощи чисел  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , а затем добавить в сумму справа число  $m_3$ . Указанные возможности и образуют рекуррентное соотношение (2).

Если  $0 < m < m_1 - 1$ , то не существует ни одной композиции числа  $m$ , составленной из частей  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ . Таким образом, получаем начальные условия (3).

Если  $m_1 < m < m_2 - 1$ , то существует ровно столько композиций числа  $m$ , сколько существует композиций числа  $m - m_1$ . Получили соотношение (4).

Если  $m_2 < m < m_3 - 1$ , то можно составить композицию числа  $m$  только из частей  $m_1$  и  $m_2$ . В данном случае имеется только две возможности сделать это. В первом случае можно сначала составить композицию числа  $(m - m_1)$  при помощи чисел  $m_1$  и  $m_2$ , а затем добавить в сумму справа число  $m_1$ . Во втором случае можно сначала составить композицию числа  $(m - m_2)$  при помощи чисел  $m_1$  и  $m_2$ , а затем добавить в сумму справа число  $m_2$ . Указанные возможности и образуют рекуррентную формулу (5). Теорема доказана.

**4. Производящая функция.** Сопоставим последовательности сумм  $\{S_m\}$ ,  $m \in \mathbf{N}$  формальный степенной ряд и запишем производящую функцию для этих сумм.

**Теорема 3.** *Производящая функция сумм  $\{S_m\}$ ,  $m \in \mathbf{N}_0$ , имеет вид*

$$f_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}}.$$

**5. Частные случаи.** Рассмотрим последовательность композиций числа  $m$  с ограничениями на значения натуральных частей  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 2$  и  $m_3 = 3$ .

При  $m = 1$  есть только одна композиция:  $m = 1$ .

При  $m = 2$  получаем две композиции:  $m = 1 + 1$  и  $m = 2$ .

При  $m = 3$  получаем 4 композиции:  $m = 1 + 1 + 1$ ,  $m = 1 + 2$ ,  $m = 2 + 1$  и  $m = 3$ .

При  $m = 4$  получаем 7 композиций:  $m = 1 + 1 + 1 + 1$ ,  $m = 1 + 1 + 2$ ,  $m = 1 + 2 + 1$ ,  $m = 2 + 1 + 1$ ,  $m = 2 + 2$ ,  $m = 1 + 3$  и  $m = 3 + 1$ .

В итоге образуется последовательность 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, ..., сумм вида  $S_m(-2/3, -1/3)$ ,  $m \in \mathbf{N}$  плоских сечений Пирамиды Паскаля, которая с некоторого номера совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи [3].

Если уменьшить количество ограничений до двух, то переходим в область треугольника Паскаля. Рассмотрим, например, композиции числа  $m$  с ограничениями на значения натуральных частей  $m_1 = 1$  и  $m_2 = 2$ . Образуется последовательность 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., которая с некоторого номера совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи [3].

Полученные в данной работе соотношения достаточно легко обобщаются на случай  $n$  ограничений, что позволяет совершенствовать известные алгоритмы перечисления композиций [1,2] или строить новые, вычислять длины и количество композиций чисел фиксированной длины.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин А. В., Бирюков Е. С. О практической реализации некоторых алгоритмов, связанных с проблемой композиции чисел // Кибернетика и программирование. 2015. № 1. С. 27–45.
2. Кручинин В. В. Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа  $n$  // Доклады ТУСУР. 2008. 17, № 3. С. 113–119.
3. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск : Наука, 2000. 294 с.
4. Кузьмин О. В., Серегина М. В. Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации // Дискретная математика 2010. 22, № 3. С. 83–93.
5. Эндриус Г. Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.

Кузьмин Олег Викторович  
Иркутский государственный университет (ИГУ),  
E-mail: quzminov@mail.ru

Стрихарь Марина Валерьевна  
Иркутский государственный университет путей сообщения (ИрГУПС),  
Забайкальский институт железнодорожного транспорта (ЗабИЖТ)  
E-mail: mseryogina@mail.ru



## К ВОПРОСУ О ДОВЕРИИ В СИСТЕМАХ СИМБИОТИЧЕСКОГО ИНТЕЛЛЕКТА НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕЙ

© 2023 г. В. Е. МУЦЕНЕК

**Аннотация.** Работа обращается к вопросу обеспечения доверия в системах симбиотического интеллекта на основе нейросетей. Описываются принципы построения многоуровневой архитектуры обеспечения контроля функционирования с применением мониторов обращений для социотехнической системы, использующей нейронную сеть.

**Ключевые слова:** нейронные сети, корректность субъектов, монитор безопасности, социотехническая система.

**AMS Subject Classification:** 68T07, 68M25

**1. Нейронные сети в социотехнических системах.** Одной из традиционных ролей, отводимых системам искусственного интеллекта, и в частности нейросетям, является роль экспертной системы поддержки принятия решений. По своей архитектуре любая практически применяемая система поддержки принятия решений может быть отнесена к социотехническим системам. В последнее время распространение получила концепция построения систем принятия управленческих решений с применением симбиотического интеллекта, в которых возможности эксперта-ЛПР и нейронной сети взаимно дополняют друг друга. Представления об этой концепции даны, к примеру, в работах Д.И. Ицкова [4], А.Д. Селиверстовой [6], Л.А. Василенко и В.В. Зотова [1].

Существуют объективные риски информационной безопасности для социотехнических систем, связанные с угрозами безопасности, характерными для систем искусственного интеллекта. В Банке данных угроз ФСТЭК России обозначены, в частности, УБИ.218 Угроза раскрытия информации о модели машинного обучения; УБИ.219 Угроза хищения обучающих данных; УБИ.220 Угроза нарушения функционирования («обхода») средств, реализующих технологии искусственного интеллекта; УБИ.221 Угроза модификации модели машинного обучения путем искажения («отравления») обучающих данных; УБИ.222 Угроза подмены модели машинного обучения. Из перечисленных УБИ.218 и УБИ.219 могут быть нейтрализованы традиционными средствами разграничения доступа, тогда как остальные влияют непосредственно на процессы обучения нейронных сетей. Наихудший сценарий для УБИ.221 состоит в том, что обучающий набор изначально содержит некоторое количество «отравленных» данных. Парировать такие угрозы представляется возможным.

Ещё до появления этих угроз в БДУ, исследователи развивали идеи обеспечения безопасности социотехнических систем. С. А. Радько и О. М. Лепешкин рассматривали проблему информационной безопасности наряду с физической защищенностью. [5] В работе П. В. Харечкина описана концепция, напоминающая субъектные модели разграничения доступа, но в то же время выходящая за традиционные рамки таких моделей [7]. Существенный научный и практический интерес представляет субъектно-ориентированная модель, адаптированная к иерархической модели разграничения доступа, описанная в работе Н. А. Гайдамакина [2]. Проблемы атак на данные неплохо освещены в зарубежной научной литературе (например [8], [9], [10]).

**2. Концепция нейросети с мониторами обращений.** Математический аппарат моделей разграничения доступа на основе мониторов безопасности объектов и мониторов порождения

субъектов достаточно полно представлен в [3]. С точки зрения модели изолированной программной среды (ИПС), система может считаться доверенной, если в ней присутствует лишь конечное множество порожденных субъектов (контролируется монитором порождения субъектов), и порождаемые субъекты корректны (абсолютно корректны) относительно друг друга. Это достигается контролем множеств  $[s]_t$  объектов  $o \in O$ , ассоциированных с субъектом  $s \in S$  в момент времени  $t$ , состояний  $o[t]$  объекта  $o$  в момент времени  $t$ , потоков  $Stream(s, o) \rightarrow o'$  от объекта  $o$  к объекту  $o'$  и порождений  $Create(s, o) \rightarrow s'$  субъекта  $s'$  из объекта  $o$ .

Ключевым условием для модели ИПС является определение корректности субъектов  $s$  и  $s'$  относительно друг друга:

$$\forall o \in [s]_t, o' \in [s']_t \nexists s'' \in S, (Stream(s'', o) \rightarrow o', Stream(s'', o') \rightarrow o).$$

Субъекты  $s$  и  $s'$  называются абсолютно корректными относительно друг друга, если  $[s]_t \cap [s']_t = \emptyset$ .

Представим защищенную нейронную сеть как замкнутую систему, в которой:

- 1) Количество нейронов конечно и контролируется монитором порождения субъектов;
- 2) Количество нейронов в слое конечно и контролируется монитором порождения субъектов;
- 3) Каждый слой с точки зрения монитора безопасности объектов рассматривается как виртуальный субъект, порождаемый из объекта при активации хотя бы одного нейрона при поступлении сигнала достаточного уровня с предыдущего слоя;
- 4) Каждый нейрон в слое рассматривается как значение дискретного параметра, характеризующего объект-слой, таким образом различные комбинации активированных нейронов описывают разные виртуальные субъекты;
- 5) Изменение значения одного дискретного параметра, характеризующего финальный объект-слой, не приводит к изменению значений остальных параметров финального объекта-слоя;
- 6) Монитор безопасности объектов контролирует корректность слоёв относительно друг друга и относительно финального слоя;
- 7) Нежелательным будет такая ассоциация, которая создается между любым слоем и финальным слоем, описывающим виртуальный субъект с запрещенными параметрами;
- 8) Функция активации нейрона модулируется функцией контроля монитора безопасности объектов, и принудительно понижает уровень сигнала нейронов скрытых слоев, информационные потоки которых зафиксированы монитором порождения субъектов для виртуальных субъектов с нежелательными ассоциациями. Величина снижения зависит от величины совпадения комбинации финального слоя с запрещенной комбинацией;
- 9) Функция активации нейрона определена и предсказуема для всех комбинаций ввода.

В такой архитектуре становится возможным многоуровневый контроль функционирования системы: 1. на уровне собственного компонента функции активации нейрона; 2. на уровне замкнутости и ограниченности множества нейронов, составляющих сеть (обеспечивая противодействие атакам модификации структуры сети); 3. на уровне отсечки нежелательного вывода; 4. на уровне контроля цепочки событий порождения субъектов, приводящей к появлению нежелательного вывода. Указанные уровни необходимо реализовать в рамках подсистемы поддержки принятия решений. С точки зрения социотехнической системы, подсистема поддержки принятия решений может представлять собой «чёрный ящик» и рассматриваться как объект (статический код в долговременной памяти ЭВМ), из которого в определенных условиях порождается субъект (программа во время исполнения). Их защиту, в свою очередь, возможно обеспечить резидентными компонентами безопасности уровней приложений, операционной системы и оборудования.

**3. Заключение.** Представленная концепция является результатом мысленного эксперимента и продолжает дискуссию, развернутую в ходе Второй международной научно-практической конференции «Экспертные институты в XXI веке: цивилизационные и цифровые концепции меняющегося мира» в ответ на выступление д.с.н., проф. Л. А. Василенко (РАНХиГС). Построение прототипа нейронной сети с встроенными мониторами обращений представляет собой интересную творческую практическую задачу, для решения которой имеется достаточно изученная теоретическая база, и может стать дальнейшим развитием представленной концепции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко Л. А., Зотов В. В.* Организация экспертной экосистемы на цифровой платформе с использованием симбиотического интеллекта // Экспертные институты в XXI веке: цивилизационные и цифровые концепции меняющегося мира : сб. науч. тр. Второй международной научно-практической конференции. Иркутск, 16–17 июня 2023 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2023. С. 24–29.
2. *Гайдамакин Н. А.* Многоуровневое тематико-иерархическое управление доступом (MLTHS-система) // Прикладная дискретная математика. 2018. № 39. С. 42–57.
3. *Девянин П. Н.* Обзорные лекции по моделям безопасности компьютерных систем // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 2. С. 151–190.
4. *Ицков Д. И.* Создание симбиотического интеллекта в контексте социальной политики развития социума // Вестник Забайкальского государственного университета. 2017. 23, № 11. С. 37–42.
5. *Радько С. А., Лепешкин О. М.* Развитие методологического подхода разработки функционально-дискреционной модели доступа социотехнических информационных систем на основе среды радикалов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2008. № 8. С. 14–18.
6. *Селиверстова А. Д.* Симбиотический интеллект: его понятие, структура и функции применительно к управленческой деятельности // Культура, личность, общество в условиях пандемии и пост-пандемии: методология, опыт эмпирического исследования : материалы XXV Междунар. конф. памяти проф. Л. Н. Когана. Екатеринбург, 17–19 марта 2022 г. Екатеринбург : Урал. гос. пед. ун-т, 2022. С. 223–228.
7. *Харечкин П. В.* Разработка активатора монитора безопасности функционально-ролевой модели разграничения доступа в социотехнической системе // Вестник Ставропольского государственного университета. 2010. № 5. С. 70–77.
8. *Chen B., Carvalho W., Baracaldo N., Ludwig H., Edwards B., Lee T., Molloy I., Srivastava B.* Detecting Backdoor Attacks on Deep Neural Networks by Activation Clustering // Computing Research Repository. 2018/ arXiv: [abs/1811.03728](https://arxiv.org/abs/1811.03728).
9. *Gao Y., Xu C., Wang D., Chen S., Ranasinghe D., Nepal S.* STRIP: A Defence Against Trojan Attacks on Deep Neural Networks // Computing Research Repository. 2020/ arXiv: [abs/1902.06531v2](https://arxiv.org/abs/1902.06531v2).
10. *Tran B., Li J., Madry A.* Spectral Signatures in Backdoor Attacks // Computing Research Repository. 2018/ arXiv: [abs/1811.00636](https://arxiv.org/abs/1811.00636).

Муценек Витус Евгеньевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [comsecsurvey@gmail.com](mailto:comsecsurvey@gmail.com)





## АВТОМАТИЗАЦИЯ РАБОТЫ РЕПОЗИТОРИЯ С ПРОГРАММНЫМ ОБЕСПЕЧЕНИЕМ

© 2023 г. А. А. НАСИБУЛИН, А. С. КАЗИМИРОВ

Аннотация. В UNIX-подобных системах распространено использование репозитория с пакетами программ с целью поддержания актуальности и стабильности компонентов операционной системы и прикладных программ. Для наполнения репозитория пакетами используются либо CI/CD технологии, либо ручное редактирование через терминал. Оба подхода требуют значительных затрат времени и усилий для достижения нужного результата, что является проблемой данного проекта. Для её решения был создан веб-сервер, который упрощает создание и управление репозиториями с пакетами программного обеспечения.

**Ключевые слова:** Веб-интерфейс, scoop, aptly, автоматизация.

**AMS Subject Classification:** 93B70, 93C40

**1. Введение.** В настоящее время в корпоративных системах все больше предпочитают автоматическую установку и обслуживание программного обеспечения и операционных систем ручному проведению действий по их установке, обновлению и удалению. Такой подход реализован в полной мере в UNIX-подобных системах с помощью совместного использования технологий централизованного обслуживания программного обеспечения на уровне операционной системы, таких как пакетные менеджеры. В ОС Windows с решением данной задачи возникают сложности ввиду отсутствия какого-либо официального пакетного менеджера с сетевыми функциями.

Стоит упомянуть то, что происходит постепенный переход на использование Linux систем в рамках импортозамещения, но по умолчанию в них не встроена поддержка средств запуска и обслуживания программ, написанных для платформы Windows.

Упрощение работы с репозиториями различных пакетных менеджеров тоже является одной из задач данного проекта, так как на данный момент для наполнения репозитория пакетами распространено либо использование CI/CD технологий, либо ручное редактирование через терминал.

**2. Постановка задачи.** Таким образом можно сформулировать следующие требования:

- 1) обеспечить централизованное управление пакетами под ОС Windows;
- 2) создать средства программной поддержки репозитория с ПО.

Для решения этих задач нужно использовать open-source компоненты, так как компоненты данного проекта должны распространяться под свободной лицензией.

Соответственно поставлены следующие задачи:

- 1) написание сервера с работой через API;
- 2) реализация клиентского веб-приложения.

**3. Описание предметной области.** Анализ существующих систем для автоматизированной развёртки программного обеспечения для ОС Windows показал, что уже существуют способы автоматизации установки и обновления ПО через встроенную подсистему MSI-пакетов с помощью программного продукта от Microsoft System Center Configuration Manager.

Этот способ удобен, но имеет свои недостатки:

1. Не все программы поставляются в виде msi-пакетов или являются легко адаптируемыми для упаковки в данный формат.
2. Дополнительно при развёртке и использовании данного продукта системными администраторами возникают трудности.

Дополнительно способом автоматизации установки и обновления ПО под ОС Windows можно считать использование Chocolatey с использованием локальных репозиториев. Этот способ тоже удобен и, более того, лёгок в развёртке.

Однако у него тоже есть недостатки:

1. Пакетный менеджер по своей архитектуре только запускает оригинальный установщик программы в разных режимах.
2. Этот пакетный менеджер не умеет полноценно работать в режиме пользователя.

Что касается менеджера репозитория, то существует менеджер репозитория под названием Nexus Repository Manager 3, но в нём нет поддержки пакетных менеджеров для windows.

**4. Обзор технологий разработки.** Для бэкенда веб-сервиса были использованы следующие технологии:

1. Go – язык программирования, созданный компанией Google [1].
2. Echo – библиотека языка Go, позволяющая создать веб-сервер с нужным функционалом.

Использование вышеперечисленных технологий для веб-сервера обосновано тем, что их совокупное использование позволяет в будущем создать микросервис, который можно без каких-либо проблем поместить в docker-формат, что значительно упростит его развёртку.

Для фронтэнда веб-сервиса были использованы следующие технологии:

1. Cash – JavaScript библиотека, позволяющая значительно ускорить разработку проекта.
2. Materialize – CSS-фреймворк, позволяющий создавать страницы с Material-дизайном.

**5. Реализация проекта.** Проект состоит из трёх компонентов:

1. Сервер с пакетами, работающий как отдельный сервис.
2. Модуль SaltStack обеспечивающий работу с пакетным менеджером Scoop.
3. Зеркало-репозиторий.

Предполагаемая схема использования компонентов проекта представлена на рис. 1.

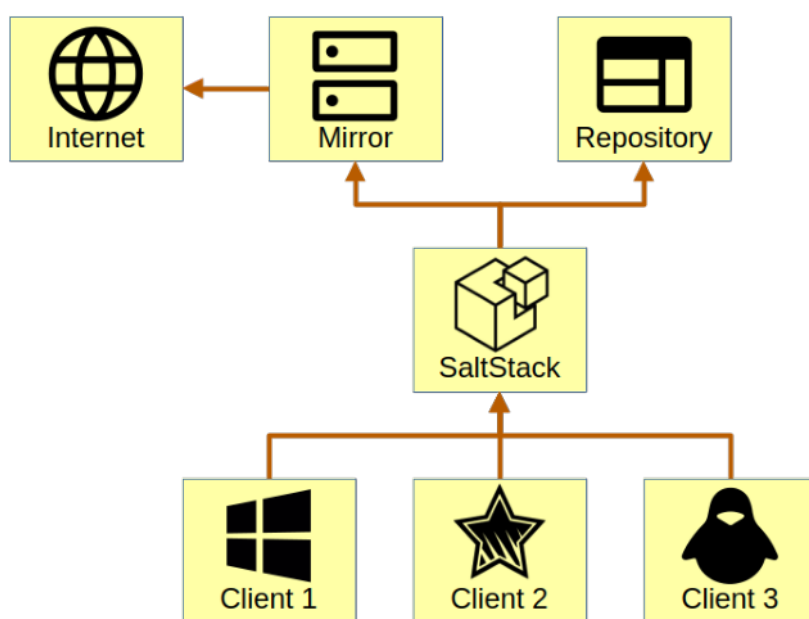


РИС. 1. Схема использования проекта

Сервер с пакетами является одним из самых больших компонентов проекта. Он обеспечивает работу локального веб-репозитория с репозиториями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Керниган Б. У., Донован А. А. Язык программирования Go. М : Вильямс, 2016.
2. Попов А. В. Язык программирования Go. СПб. : БХВ-Петербург, 2009.

Насибулин Алексей Алексеевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [alealexpro100@ya.ru](mailto:alealexpro100@ya.ru)

Казимиров Алексей Сергеевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: [a.kazimirov@gmail.com](mailto:a.kazimirov@gmail.com)



## ОЦЕНКА ПРАВДОПОДОБИЯ СТРУКТУРЫ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

© 2023 г. П. В. ПОЛУХИН

**Аннотация.** В исследовании приведено решение задачи определения оценки правдоподобия структуры байесовской сети на основе принципа максимума энтропии. Использование данной оценки позволяет определить правильность реализации алгоритмов обучения байесовских сетей, а также формализовать процедуру получения направленного ациклического графа сети. Разработаны новые решения в области верификации структуры байесовских сетей, оценки достоверности формируемого начального распределения по результатам статистического анализа выборок в процессе реализации процедур обучения.

**Ключевые слова:** байесовская сеть, метрика Байеса – Дирихле, энтропия, начальное распределение вероятностей, правдоподобие структуры.

**AMS Subject Classification:** 90C26

Байесовские сети (БС) охватывают решение широкого спектра задач, связанных с моделированием сложных процессов, протекающих в условиях неопределенности. Применение современных алгоритмов обучения структуры и параметров сети напрямую влияет на точность получения как априорных, так и апостериорных оценок. В основе структуры байесовской сети используется направленный ациклический граф, формируемый по результатам обучения структуры за счет статистического анализа обучающей выборки и установления связей между родительскими и дочерними вершинами на основе выполнения критерия условной независимости, а также применения оценочных алгоритмов. В процессе обучения на основе оценочных алгоритмов, любая операция добавления, удаления и изменения направленности связи между вершинами будет приводить к изменению некоторой оценочной функции  $S(G, D)$ . В таком случае суммарная оценка каждой из вершин байесовской сети с учетом обучающей выборки  $D$  будет иметь следующий вид [1]:

$$S(G, D) = \sum_{i=1}^n s(x_i | Y_i). \quad (1)$$

Тогда для оценки правдоподобия структуры двух графов  $G$  и  $G'$  представим в виде следующего условия  $S(G, D) = S(G', D)$ . Сформулируем метрику Байеса-Дирихле (БД) для произвольного графа  $G$  байесовской сети

$$BD = \ln P(\theta | Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \ln \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^r a_{ijk})}{\Gamma(\sum_{k=1}^r (N_{ijk} + a_{ijk}))} + \sum_{k=1}^r \ln \frac{\Gamma(N_{ijk} + a_{ijk})}{\Gamma(a_{ijk})}. \quad (2)$$

Далее определим эквивалентную метрику Байеса-Дирихле (БДЭ) [2]

$$BDe = \ln P(\theta | Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \ln \left( \frac{\Gamma(\frac{N^i}{q})}{\Gamma(N_{ij} + \frac{N^i}{q})} \right) + \sum_{k=1}^r \ln \left( \frac{\Gamma(N_{ijk} + \frac{N^i}{q})}{\Gamma(\frac{N^i}{q})} \right), \quad (3)$$

где  $N^i$  – размер эквивалентной выборки. Для получения правдоподобия на основе принципа максимальной энтропии (ПМЭ) введем классическое определение энтропии Шеннона для некоторой

случайной переменной байесовской сети  $X$

$$H(X|\theta) = \mathbb{E}(-\log(P|X)) = \sum_{i=1}^N H(X_i|\theta_{X_i}), \quad (4)$$

где  $H(X_i|\theta_{X_i})$  – энтропия  $X_i$  при наличии множества родительских вершин  $Y = Parents(X_i)$ . Математическое ожидание для  $H(X_i)$  для текущей выборки  $D$  имеет вид [4]:

$$\mathbb{E}(H(X_i)|D) = \int H(X_i|\theta_{X_i})P(\theta_{X_i}|D)d\theta_{X_i}, \quad (5)$$

где  $P(\theta_{X_i}|D)$  – распределение Дирихле следующего вида:

$$P(\theta_{X_i}|D) = \int P(\theta_{X_i}|D, \alpha_{i,j,k})P(\alpha_{i,j,k}|D)d\alpha_{i,j,k}. \quad (6)$$

С учетом метрики Байеса-Дирихле, получим для  $P(H(X_i)|D)$ :

$$\mathbb{E}(H(X_i)|D) = \mathbb{E}(H(X_i)|D, \alpha_{i,j,k})BD(X_i|Y, \alpha_{i,j,k}). \quad (7)$$

Применяя подход Андерсона [3], получим математическое ожидание  $\mathbb{E}(H(X_i)|D, \alpha(i, j, k))$

$$\begin{aligned} P(H(X_i)|D, \alpha_{i,j,k}) &= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \frac{a_{ijk} + N_{ijk}}{a_{ij} + N_{ij}} \ln \left( \frac{a_{ijk} + N_{ijk}}{a_{ij} + N_{ij}} \right) - \sum_{j=1}^q \frac{r-1}{2(a_{ij} + N_{ij})} \\ &= H(X_i|D, \alpha_{i,j,k}) - \sum_{j=1}^q \frac{r-1}{2(a_{ij} + N_{ij})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим принцип ПМЭ двух графов  $G'$  и  $G''$ , отличающихся добавлением дополнительной родительской вершины в  $G''$ :

$$P(H'(X)|D) \leq P(H''(X)|D), \quad (9)$$

где  $H'$  и  $H''$  значения энтропий, соответствующие графам  $G'$  и  $G''$  соответственно. Рассматривая ПМЭ для оценки правдоподобия структуры БС, Сузуки [5] установил зависимость энтропии и метрики БД:

$$\begin{aligned} H(X_i|Y', p_{i,j|k}) &\leq H(X_i|Y'', p_{i,j|k}), Y' \subset Y'', \\ p_{i,j|k} &= \frac{\alpha_{ijk} + N_{ijk}}{\alpha_{ij} + N_{ij}}, \\ BD(X_i|Y', \alpha_i) &\geq BD(X_i|Y'', \alpha_i). \end{aligned} \quad (10)$$

С ростом размерности выборки  $D$  наблюдаем сходимость вероятностей  $p_{i,j|k}$  к значениям  $?_{ijk}$ .

$$H(X_i|Y', \alpha_{ijk}) \leq H(X_i|Y'', \alpha_{ijk}), Y' \subset Y'' \quad (11)$$

С учетом того, что  $\alpha_{i,j,k} = \alpha_i/rq$  сформулируем ПМЭ для метрики БДЭ:

$$\mathbb{E}(H'(X_i)|D, \alpha_{i,j,k}) BDe(X_i|Y', \alpha_i) \leq \mathbb{E}(H''(X_i)|D, \alpha_{i,j,k}) BDe(X_i|Y'', \alpha_i). \quad (12)$$

Условиях частичной наблюдаемости параметров и ограниченности выборки  $D$  можно получить случай, когда значения родительских вершин  $Y''$  будет не определены. Уточняя параметр  $\alpha_i$ , получим:

$$\mathbb{E}(H'(X_i)|D, \alpha_{i,j,k}) BDe(X_i|Y', \alpha_i) \leq \mathbb{E}(H''(X_i)|D, \alpha_{i,j,k}) BDe\left(X_i|Y'', \alpha_i \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)\right), \quad (13)$$

где  $\tilde{q}$  – число возможных состояний, для которых  $N_{i,j,k} > 0$ . Применение МПЭ позволяет произвести верификацию значений оценок  $BD(X_i|Y', \alpha_i)$  и  $BD(X_i|Y'', \alpha_i)$ ,  $BDe(X_i|Y', \alpha_i)$  и  $BDe(X_i|Y'', \alpha_i)$ , формируемых в результаты выполнения алгоритмов обучения структуры для

двух графов  $G'$  и  $G''$ , составляющих основу байесовских сетей  $B' = \{X, G'\}$  и  $B'' = \{X, G''\}$ . Таким образом, процедура оценки правдоподобия структуры байесовских сетей на основе ПМЭ является универсальной процедурой, позволяющей получить наиболее оптимальную структуру сети, произвести верификацию различных алгоритмов обучения и выбрать наиболее оптимальный алгоритм для решения конкретной задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рассел С., Норвиг П.* Искусственный интеллект: современный подход. М. : Вильямс, 2006.
2. *Тулуньев А. Л.* Апостериорные оценки вероятностей в алгебраических байесовских сетях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. 2. С. 51–59.
3. *Anderson G. A.* Monotonicity Property of the Gamma Function // Proc. AMS. 1995. 125, № 11. С. 3355-3362.
4. *Scutari M.* An Empirical-Bayes Score for Discrete Bayesian Networks // Machine Learning. 2016. 52, № 1. С. 438-448.
5. *Suzuki G. A.* Theoretical Analysis of the BDeu Scores in Bayesian Network Structure Learning // Behaviormetrika. 1995. 1, № 1. С. 1-20.

Полухин Павел Валерьевич  
Воронежский государственный университет (ВГУ)  
E-mail: [alfa\\_force@bk.ru](mailto:alfa_force@bk.ru)



## РАЗРАБОТКА ПРАВИЛ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ОШИБОК НЕСООТВЕТСТВИЯ ТИПОВ ВЫРАЖЕНИЙ В ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ «1С:ПРЕДПРИЯТИЕ»

© 2023 г. В. А. ПОПОВА

**Аннотация.** Динамически типизированные языки программирования широко применяются в разработке программного обеспечения различной степени сложности. Одной из причин выбора таких языков заключается в отсутствии необходимости объявления типов переменных, что экономит время, исключая необходимость изучения правил преобразования конструкций. Однако, в отличие от статически типизированных языков, динамическая типизация может уменьшить надежность и качество программного обеспечения. Поэтому в процессе разработки необходимо применять методы и инструменты, направленные на минимизацию ошибок, связанных с несоответствием типов данных. Для распространенных языков программирования с динамической типизацией, таких как Haskell, OCaml, Standard ML, JavaScript и Python, уже имеются инструменты, предназначенные для проверки соответствия типов. Но на текущий момент для языка программирования «1С:Предприятие» нет механизма, который бы обеспечивал эффективное выявление ошибок несоответствия типов с учетом специфичных аспектов системы типизации этого языка.

**Ключевые слова:** статическая проверка типов, динамическая типизация, система типов, 1С:Предприятие, формат «Дерево типов конфигурации», механизм статического анализа.

**AMS Subject Classification:** 68N15, 68-04

**1. Способ выявления ошибок несоответствия типов.** Процесс разработки статических анализаторов [3] на основе исходного кода программ предполагает осуществление проверки типов путем анализа абстрактного синтаксического дерева (Abstract Syntax Tree — AST). AST представляет собой структуру, отражающую иерархию и взаимосвязи между компонентами программного кода.

Формирование AST включает в себя лексический и синтаксический анализ программы [2]. Лексический анализ направлен на выделение лексем, таких как ключевые слова, операторы и литералы. Затем следует этап синтаксического анализа, где лексемы подвергаются анализу с учетом грамматики, определенной согласно спецификации соответствующего языка программирования. В результате этой операции формируется структура AST, на основании которой осуществляется проверка корректности типов конструкций.

В дополнение к формированию AST, следует отметить, что разработка механизма статического анализа для «1С:Предприятия» в значительной степени обусловлена сложностью системы типов этого языка программирования.

**2. Система типов «1С:Предприятия».** В [1] представлены результаты анализа системы типов «1С:Предприятия». В ходе разработки механизма статического анализа был разработан формат, получивший название «Дерево типов конфигурации» (ДТК), который предназначен для

---

Исследование проведено при финансовой поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых № 091-23-303 «Разработка программного комплекса для статической проверки типов и механизмы интеграции со средами разработки прикладных решений конфигураций «1С:Предприятия»».

описания объектов конфигурации и типов платформы. Такое название обосновано тем, что каждый объект конфигурации наследует функциональность от одного или нескольких типов, определенных в платформе «1С:Предприятие». Важно отметить, что файл формата ДТК может быть сформирован для любой конфигурации «1С:Предприятия».

Далее для успешной реализации статической проверки соответствия типов необходимо было создать представление программного кода конфигурации в виде AST [6]. После этого выполнялась разработка правил для анализа соответствия типов конструкциям языка, используя информацию, содержащуюся в документе формата ДТК.

**3. Разработка правил для проверки конструкций языка программирования «1С:Предприятие».** На основе информации о типах «1С:Предприятия» [1] и спроектированной структуры программного комплекса, представленного в [5] в виде диаграммы классов, осуществлялась разработка правил для выявления несоответствия типов в программном коде конфигураций «1С:Предприятия».

В [4] определены правила проверки типов для выражений, в которых применяются бинарные операции. Далее осуществлялось разработка правил для проверки присвоения типов переменным, определение конструкторов объектов, корректность обращения к свойству объекта и т. д. Порядок проверки каждой такой структуры данных языка программирования «1С:Предприятие» представлен далее.

Для структуры данных `expr_identifier`, являющейся представлением идентификатора (наименования) или свойства, в методе `types(...)`<sup>1</sup> выполняется поиск у `Context` (класса, обозначающего тип платформы или объект конфигурации) этого свойства и в качестве множества допустимых значений указываются его типы.

В `expr_new` (определение конструктора объекта) в `types(...)` осуществляется поиск экземпляра `Context`, который и будет составлять множество типов.

Структура данных `expr_not` (логическое отрицание) содержит 1 элемент в `childNodes` (набор дочерних вершин), который определяет выражение, подвергаемое инверсии. Для этого выражения вызывается метод `types(...)`. Если метод вернул тип Булево или Число, то ошибок в структуре данных `expr_not` нет, иначе фиксируется ошибка о несоответствии типа в выражении.

Для тернарного оператора, представленного в виде `expr_question`, определены 3 элемента в `childNodes`, первый из которых (проверяющееся выражение) должен иметь тип значения Булево, что в случае нарушения этого правила приводит к ошибке несоответствия типов. Для второго и третьего элементов множество допустимых типов значений не является фиксированным, а определяется посредством вызова метода `types(...)` для каждого элемента.

В структуре данных `dot_expr`, которая определяет обращение к свойству объекта через точку, выполняется поиск в экземпляре `Context` элемента `ContextItem` (представление свойства, метода или элемента коллекции значений) с указанным наименованием свойства. Если элемент не найден, то это означает попытку обращения к несуществующему свойству, что является ошибкой.

Для `formal_param`, обозначающей параметр метода, `types(...)` возвращает тип в случае, если указано значение по умолчанию, иначе результатом является пустое множество.

Метод `types(...)` конструкции `function_call` проверяет корректность обращения к методу. Сначала выполняется поиск метода (элемента `ContextItem`). Если элемент не найден, то фиксируется ошибка, что выражение не является методом. Если же метод был найден, то проверяется корректность передачи параметров по количеству и типам их значений.

Таким образом, определены правила формирования множеств допустимых типов для структур данных, определяющих литералы и выражения.

Для инструкций, таких, как циклы, условия, присвоение значения переменной и т. д., множество допустимых типов не формируется, поскольку требуется только определять корректность использования подобных конструкций. Стоит отметить, что инструкции обладают так называемым «побочным эффектом», который состоит в том, что могут изменяться нелокальные атрибуты, например глобальные переменные или реквизиты формы.

<sup>1</sup>определяет множество допустимых типов выражения, соответствующего поддереву AST с корнем в данной вершине



Для структуры данных `formal_param_list`, определяющей перечисление параметров метода, в `parse(...)`<sup>1</sup> происходит обращение к одноимённому методу класса `FormalParam` для определения множества допустимых типов каждого параметра представляющегося, как `formal_param`.

В `exec_instruction` (блок метода) проверяется, что у элемента `childNodes`, который является аргументом встроенного в платформу метода **Выполнить**, должен быть тип `Строка`.

Структура данных `return_instruction` содержит одно из допустимых типов возвращаемых значений метода конфигурации, определяющееся посредством вызова `types(...)` для дочерней вершины, которая и описывает возвращаемое значение.

Для конструкции итерационного цикла `for_instruction`, которая представляет собой вид **Для K=0 По Количество Цикл**, выполняется проверка значения переменных цикла (`K` и `Количество`). Если значения имеют не тип `Число`, то фиксируется ошибка о несоответствии типа.

Для разбора структуры данных `execution_block`, определяющей тело цикла, вызывается метод `parse(...)`, который не переопределяется для соответствующего этой структуре класса `ExecutionBlock`, а выполняются согласно реализации по умолчанию, так как `execution_block` является только группирующей конструкцией для набора из `instruction`, содержимое которых требуется проверять на соответствие типов.

Реализация по умолчанию заключается в следующем: метод `parse(...)` выполняет вызов одноимённого метода для дочерних конструкций. В методе `types(...)` указывается, что вершина не имеет множества допустимых типов, так как в общем случае неизвестно, к какой структуре данных она относится. В `getContextItems(...)` также в качестве возвращаемого значения указывается пустое множество. Метод `str()` является абстрактным ввиду того, что каждая конструкция языка имеет своё наименование и поэтому метод должен быть реализован в каждом определяющем конструкцию классе.

Для цикла по коллекции значений (структуры данных `foreach_instruction`) в методе `parse(...)` проверяется, что переменная действительно является некоторой коллекцией и по ней можно выполнить обход в цикле.

Проверка структур данных `while_instruction` и `if_instruction`, обозначающих цикл с условием и условный оператор соответственно, заключается в том, что тип проверяемого ими выражения, должен быть значения типа `Булево`, иначе возникает ошибка несоответствия типа. Такие структуры данных также содержат `execution_block`, которая обрабатывается так же, как и в описании `for_instruction`. Аналогично обработка `execution_block` осуществляется и для конструкции `try_instruction`, которая определяет блок кода, в котором может произойти ошибка и на основании этого будет вызвано и обработано исключение.

Когда встречается структура данных `goto_instruction`, то формируется предупреждение: «Не следует использовать конструкцию **Перейти** в программе». Это связано с тем, что разработчики платформы «1С:Предприятие» не рекомендуют использование безусловных переходов, так как они затрудняют понимание программного кода.

В конструкции **ВызватьИсключение** (`throw_instruction`) выполняется вызов метода `parse(...)` для дочернего элемента `expr`, являющегося некоторым выражением, которое требуется проверить на соответствие типов. Таким выражением может являться вызов конструктора объекта или выражение, которое использует бинарные операции.

Таким образом, сформированы правила для проверки соответствия типов конструкций языка «1С:Предприятие».

**4. Дальнейшее развитие проекта.** На текущий момент выполняется доработка и тестирование программного комплекса для возможности оперативно выявлять ошибки несоответствия типов в ходе разработки конфигураций на платформе «1С:Предприятие». Далее будут проводиться работы по изучению механизмов интеграции разработанного программного комплекса с конфигуратором «1С:Предприятия» и средой разработки Eclipse, которая, как и конфигуратор, применяется для создания прикладных решений.

---

<sup>1</sup>проверяет соответствие типов конструкциям языка и определяет возможные типы возвращаемого значения функции

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балюк А. С., Попова В. А.* Разработка программного комплекса для конвертации конфигурации платформы «1С:Предприятие» в UML-модель // Сложные системы модели, анализ и управление. 2021. № 4. С. 137–145.
2. *Попова В. А.* Вывод типов выражений во встроенном языке программирования «1С:Предприятие» // Синтаксис и семантика логических систем : материалы 7-й Междунар. школы-семинара. Владивосток, 1–5 авг. 2022 г. Владивосток : Изд-во Дальневост. федер. ун-та, 2022. С. 37.
3. *Попова В. А.* Применение методики статического анализа для выявления ошибок в программах на динамических языках программирования // Информационные технологии. Проблемы и решения. 2022. № 19. С. 26–31.
4. *Попова В. А.* Проверка соответствия типов конструкций динамического языка программирования на основании построения AST // Ляпуновские чтения : материалы конф. Иркутск, 5–9 дек. 2022 г. Иркутск : Изд-во ИДСТУ СО РАН, 2022. С. 114–115.
5. *Попова В. А.* Проектирование механизма статического анализа для выявления ошибок несоответствия типов в программах на динамических языках программирования // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022) : материалы 4-й Междунар. конф. Иркутск, 19–22 сент. 2022 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 142–145.
6. *A. S. Balyuk, V. A. Popova* Static type-checking for programs developed on the platform 1С:Enterprise // CEUR Workshop Proceedings. Irkutsk, 14 September 2021. С. 101–111.

Попова Виктория Алексеевна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: victorypopova1@gmail.com



## КВАНТОВЫЙ ПОИСК С РАЗРУШАЮЩИМ СЦЕПЛЕННОСТЬ КАНАЛОМ ОБРАЩЕНИЯ К ОРАКУЛУ

© 2023 г. А. Э. РАСТЁГИН, А. М. ШЕМЕТ

Аннотация. Работа посвящена исследованию квантового поиска в случае, когда обмен данных с оракулом подвержен разрушающим сцепленностью искажениям. Примером такого воздействия могут быть измерения в вычислительном базисе, которые производятся в линиях связи с оракулом третьей стороной, которая противодействует легитимным пользователям.

**Ключевые слова:** алгоритм Гровера, оракул, разрушающий сцепленность канал, вероятность успеха.

**AMS Subject Classification:** 81P45, 81P68

**1. Введение.** В настоящее время значительное внимание уделяется использованию квантовых носителей как средств передачи и обработки информации [1]. Они позволяют в ряде случаев достичь значительного повышения секретности коммуникации или ускорения работы алгоритмов, как, например, в известном достижении Шора [7]. Хотя квантовые информационные технологии имеют статус развивающихся, наблюдается явный прогресс как в области теории, так и в плане реализации квантовых вычислений с несколькими десятками кубитов. Системы квантового распределения секретного ключа сравнительно широко применяются в реальной жизни. Построение квантовых компьютеров с достаточным для решения практических задач числом кубитов оценивается как вполне реалистичная, хотя и сложная технологическая задача.

Алгоритм поиска Гровера [2] стал основой для целого семейства родственных методов квантового усиления амплитуды. Однако до последнего времени оставался незатронутым вопрос о функционировании квантового поиска с зашумленными компонентами. Превосходство квантовых алгоритмов над классическими основано на использовании неклассических корреляций в суперпозиционном состоянии квантового регистра. Такого рода корреляции очень чувствительны к помехам, возникающим при взаимодействии с окружением. Проблема реализации устойчивых к шумам квантовых вычислений с достаточным количеством кубитов является одним из основных препятствий на пути создания квантовых компьютеров.

Воздействие дефазировки на квантовый поиск было изучено с различных точек зрения в работах [3, 6]. Статьи [4, 5] посвящены квантовому поиску с затуханием и деполяризацией в линиях связи с оракулом и развивают исследования, инициированные статьей [3]. Хотя эти исследования и не охватывают всех возможных сценариев, нам удалось проанализировать основные характеристики в зависимости от числа итераций. Предварительный анализ модельных случаев вполне уместен в рамках формулировки сценариев квантового поиска с комбинацией помех различных типов. В данной работе представлены результаты моделирования алгоритма Гровера с разрушающим сцепленностью воздействием в линиях связи с оракулом.

**2. Основные определения.** Пространство поиска содержит  $N = 2^n$  двоичных строк  $x = (x_1 \cdots x_n)$  с  $x_j \in \{0, 1\}$ , так что  $x \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Требуется найти одну из целевых строк из

---

Данное исследование проведено при финансовой поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых № 091-23-309 «Динамика корреляций и когерентности в алгоритмах квантового поиска при наличии шума».

набора  $\mathcal{M}$ , тогда как остальные строки лежат в дополнении  $\mathcal{M}^c$ . Без потери общности принимаем  $1 \leq |\mathcal{M}| \leq N/2$ . После инициализации  $n$ -кубитового регистра в состояние  $|0\rangle$  применяется преобразование Адамара с результатом

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle. \quad (1)$$

Итерация Гровера начинается с запроса к оракулу, способному проверять принадлежность двоичных строк набору  $\mathcal{M}$ . Этот шаг приводит к умножению каждого целевого состояния на  $\exp(i\pi)$  и описывается оператором  $J$ . Следующий шаг итерации, известный как «инверсия относительно среднего», имеет вид

$$K = 2|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| - \mathbb{1}_N, \quad (2)$$

где  $\mathbb{1}_N$  обозначает тождественный оператор. Тем самым итерация Гровера представляется оператором  $G = KJ$ . Эволюцию состояния квантового регистра удобно показать в терминах нормированных суперпозиций нецелевых и целевых состояний [3]:

$$|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{x \in \mathcal{M}^c} |x\rangle, \quad |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x \in \mathcal{M}} |x\rangle. \quad (3)$$

Угол  $\theta \in (0, 0.5\pi)$  удовлетворяет  $\cos \theta = 1 - 2M/N$ ,  $\sin^2(0.5\theta) = M/N$  и  $\cos^2(0.5\theta) = 1 - M/N$ . В базисе  $\{|w\rangle, |m\rangle\}$  итерация Гровера принимает интуитивно понятную форму

$$G = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Поскольку каждая операция (4) поворачивает состояние регистра в сторону целевой суперпозиции  $|m\rangle$  на угол  $\theta$ , в результате  $t$  итераций получается чистое состояние

$$|\psi(t)\rangle = G^t |\psi(0)\rangle = \cos(t\theta + 0.5\theta) |w\rangle + \sin(t\theta + 0.5\theta) |m\rangle. \quad (5)$$

При отсутствии шума вероятность успеха выражается в виде

$$P_{\text{suc}}^{(0)}(t) = \langle\psi(t)|\Pi_{\mathcal{M}}|\psi(t)\rangle = \sin^2(t\theta + 0.5\theta). \quad (6)$$

где проектор на подпространство целевых состояний

$$\Pi_{\mathcal{M}} = \sum_{x \in \mathcal{M}} |x\rangle\langle x|. \quad (7)$$

Принимая во внимание результаты статей [3–5], можно ожидать высокой чувствительности квантового поиска к разрушающему сцепленность воздействию в линиях связи с оракулом.

**3. Модель квантового поиска с разрушением сцепленности.** Многообразие различных сценариев воздействия шума на квантовые алгоритмы исключительно велико. Поэтому целесообразно ограничиться одним типом вносимых ошибок, по крайней мере на начальном этапе анализа. Для параметра  $0 \leq \lambda \leq 1$  рассмотрим вполне положительное преобразование

$$\rho \mapsto \Phi_\lambda(\rho) = (1 - \lambda)\rho + \lambda\Gamma(\rho), \quad (8)$$

где разрушающий сцепленность канал имеет вид

$$\Gamma(\rho) = \sum_{x=0}^{N-1} p(x; \rho) |x\rangle\langle x|, \quad p(x; \rho) = \langle x|\rho|x\rangle. \quad (9)$$

При наличии разрушающих сцепленность искажений в линиях связи с оракулом изменения матрицы плотности на итерации  $t$  описываются уравнением

$$\varrho(t-1) \mapsto \varrho(t) = \Upsilon_K \circ \Phi_\lambda \circ \Upsilon_J \circ \Phi_\lambda(\varrho(t-1)), \quad (10)$$

а унитарные каналы  $\Upsilon_J(\rho) = J\rho J^\dagger$  и  $\Upsilon_K(\rho) = K\rho K^\dagger$  отвечают неискаженному шумом квантовому поиску. Не вдаваясь в детали решения рекуррентного соотношения (10), приведем лишь окончательный результат. Введем для удобства параметр  $\nu$ , так что

$$\nu = (1 - \lambda)^2, \quad 1 - \nu = \lambda(2 - \lambda). \quad (11)$$

При наличии разрушающих сцепленность искажений вероятность успеха  $P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t)$  имеет вид

$$\text{tr}(\Pi_{\mathcal{M}}\varrho(t)) = \frac{1 - \nu^t \cos(2t\theta + \theta)}{2} - \frac{1 - \nu}{2} \frac{\nu^{t+1} \cos(2t\theta - \theta) - \nu^t \cos(2t\theta + \theta) - \nu \cos \theta + \cos \theta}{1 - 2\nu \cos 2\theta + \nu^2}. \quad (12)$$

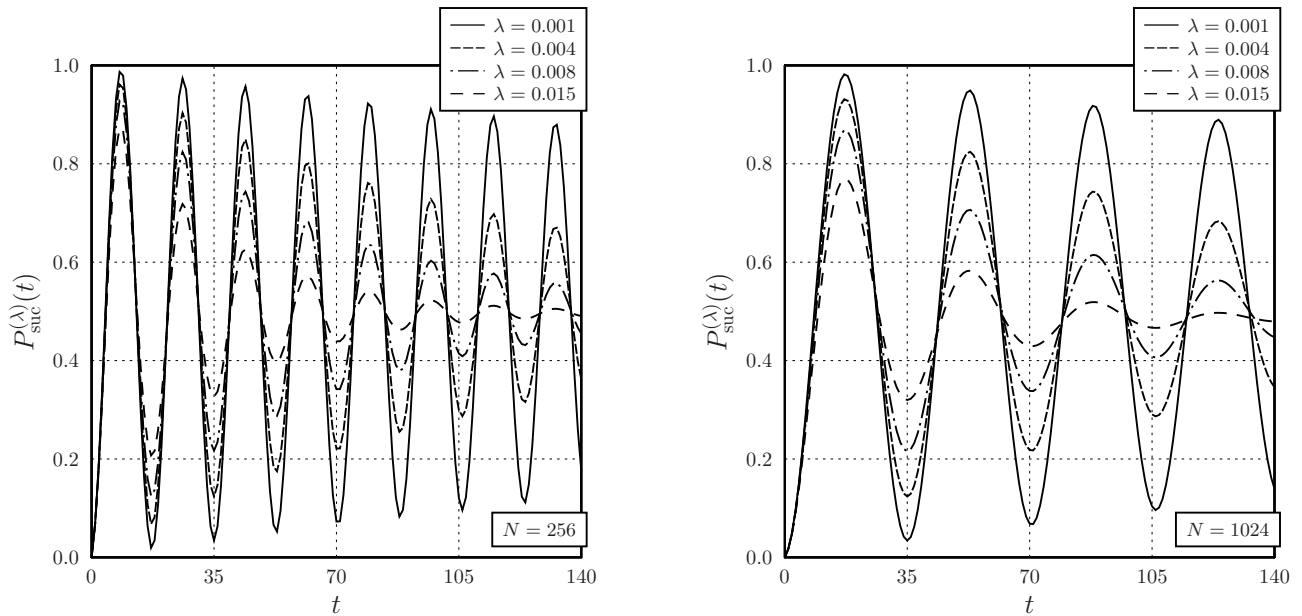


Рис. 1. Величина (12) для нескольких  $\lambda$ ,  $M = 2$ ,  $N = 256$  слева и  $N = 1024$  справа.

Ввиду некоторой сложности выражения (12) как функции числа итераций проиллюстрируем влияние разрушения сцепленности графически на конкретных примерах. Вероятность успеха показана на рис. 1 для четырех значений  $\lambda$ . Видно, что увеличение  $N$  в четыре раза приводит к уменьшению количества пиков на правых графиках в два раза. При фиксированном  $M$  вероятность успеха существенно зависит как от  $\lambda$ , так и от  $N$ . Видно, что даже незначительный уровень разрушения сцепленности способен привести к довольно быстрому вырождению квантового поиска. В случае  $\lambda = 0.015$  последующие пики оказываются заметно подавленными для обоих значений  $N$ . Если  $\lambda > 0$ , то существует предел  $P_{\text{suc}}^{(\lambda)}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Он зависит от значений  $M$ ,  $N$  и  $\lambda$ , но во всех показанных на рис. 1 случаях близок к одной второй.

**4. Заключение.** Представлены некоторые результаты анализа квантового поиска с разрушением сцепленности в линиях связи с оракулом. Совместно с работами [3–6] они подготавливают основу для исследования алгоритма Гровера при комбинированном воздействии шумов различных типов. По итогам проделанной работы можно сделать следующие выводы. Поскольку алгоритм вынужден использовать многократные обращения к оракулу, квантовый поиск быстро вырождается при сравнительно умеренных уровнях разрушения сцепленности. Если имеются опасения по поводу искажений или активного противодействия в линиях связи с оракулом, то целесообразно ограничить выполняемые итерации количеством, достаточным для попадания в окрестность первого пика. Все эти наблюдения согласуются с результатами изучения других типов ошибок в канале обращения к оракулу [3–5]. Как уже было отмечено в работе [6], локализация коллективных ошибок с точки зрения разделения вычислительного базиса на блоки влияет на

квантовый поиск с зашумленными компонентами. Результаты данного исследования, как и выводы статьи [5], свидетельствуют о том, что уязвимость на этапе обращения к оракулу остается значительной независимо от указанной локализации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халево А. С.* Квантовые системы, каналы, информация. М. : МЦНМО, 2014.
2. *Grover L. K.* Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack // *Phys. Rev. Lett.* 1997. 79, № 2. P. 325–328.
3. *Rastegin A. E.* Degradation of Grover’s search under collective phase flips in queries to the oracle // *Front. Phys.* 2018. 13, № 5. 130318.
4. *Rastegin A. E., Shemet A. M.* Quantum search degeneration under amplitude noise in queries to the oracle // *Quantum Inf. Process.* 2022. 21, № 5. 158.
5. *Rastegin A. E., Shemet A. M.* Degeneration of the Grover search algorithm with depolarization in the oracle-box wires // *Mod. Phys. Lett. A.* 2023. 38, № 5. 2350030.
6. *Reitzner D., Hillery M.* Grover search under localized dephasing // *Phys. Rev. A.* 2019. 99, № 1. 012339.
7. *Shor P. W.* Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer // *SIAM J. Comput.* 1997. 26, № 5. P. 1484–1509.

Растёгин Алексей Эдуардович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: alexrastegin@mail.ru

Шемет Анжелика Максимовна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: lika.shemet@mail.ru



## ОБ ЭЛЕМЕНТАХ РЕШЕТКИ УЛЬТРАКЛОНОВ

© 2023 г. И. К. ШАРАНХАЕВ

Аннотация. Рассматриваются элементы решетки ультраклонов ранга 2. Доказан критерий полноты в максимальном ультраклоне линейных гиперфункций. Таким образом, описаны все субмаксимальные ультраклоны линейных гиперфункций.

**Ключевые слова:** гиперфункция, линейная функция, замкнутое множество, ультраклон, решетка.

**AMS Subject Classification:** 08A99

**1. Определения и понятия.** Пусть  $E = \{0, 1\}$  и  $F = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ . Определим следующие множества функций:

$$P_{2,n} = \{f | f : E^n \rightarrow E\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n};$$
$$P_{2,n}^- = \{f | f : E^n \rightarrow F\}, P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-;$$

Функции из  $P_2$  называют булевыми функциями, из  $P_2^-$  – гиперфункциями на  $E$  (гиперфункциями ранга 2). Отметим, что в дальнейшем мы не будем различать одноэлементные подмножества и элементы этого множества, и поэтому здесь любая булева функция является гиперфункцией.

Суперпозицию гиперфункций определим, следуя работе [1]. Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

где  $f, f_1, \dots, f_n \in P_2^-$ , определяла гиперфункцию  $g(x_1, \dots, x_m)$ , определим значения гиперфункции  $f$  на наборах из множества  $F^n$  следующим образом: если  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E^m$ , то

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее гиперфункцию будем называть просто функцией, если это не вызывает недоразумений.

Для любого натурального  $n$  и любого  $i$ , где  $1 \leq i \leq n$ , обозначим через  $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  функцию, значения которой совпадают со значениями переменной  $x_i$ . Функции  $e_i^n$  называются проекциями или селекторными функциями. Нетрудно видеть, что проекции являются булевыми функциями, т. е. множества проекций для булевых функций и гиперфункций совпадают.

Замыканием множества функций  $K$  называется множество всех функций, полученных из функций множества  $K$  с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Замыкание множества  $K$  обозначается через  $[K]$ . Множество функций  $K$  называется замкнутым (замкнутым классом), если  $K = [K]$ .

Ультраклоном ранга 2 (клоном) называется замкнутое множество гиперфункций ранга 2 (булевых функций), содержащее все проекции. Далее для краткости любой ультраклон ранга 2 будем называть просто ультраклоном. Заметим, что любой клон является ультраклоном.

Ультраклон  $K$  называется максимальным, если не существует ультраклона  $K'$  такого, что  $K \subset K' \subset P_2^-$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, <https://rscf.ru/project/22-21-20013/> и Правительства Республики Бурятия.

Ультраклон  $K$  называется субмаксимальным, если не существует ультраклона  $K'$  такого, что  $K \subset K' \subset M$ , где  $M$  – некоторый максимальный ультраклон.

Следуя [2], через  $L$  обозначим клон всех линейных булевых функций, через  $L_0$  – клон всех линейных булевых функций, сохраняющих 0, через  $L_1$  – клон всех линейных булевых функций, сохраняющих 1, через  $S$  – клон всех самодвойственных булевых функций, через  $F^1$  – клон всех одноместных булевых функций.

Пусть  $R^s$  –  $s$ -местный предикат, заданный на множестве  $F$ . Будем говорить, что функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  сохраняет предикат  $R^s$ , если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{s1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату  $R^s$ , набор

$$(f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит  $R^s$ .

Для упрощения записи  $\{0, 1\}$  будем обозначать  $-$ .

Гиперфункцию, которая на всех наборах принимает значение  $-$ , будем обозначать просто  $-$ .

В [1] доказано, что максимальными ультраклонами ранга 2 являются только следующие 11 множеств:

- 1)  $P_2$  – множество всех булевых функций;
- 2)  $T_0^-$  – множество функций, которые сохраняют нуль, т. е. на наборе из всех нулей функции принимают значение 0;
- 3)  $T_1^-$  – множество функций, которые сохраняют единицу, т. е. на наборе из всех единиц функции принимают значение 1;
- 4)  $S^-$  – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix};$$

- 5)  $L^-$  – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix};$$

- 6)  $M^-$  – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix};$$

- 7)  $A_1$  – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 1 & - & - \end{pmatrix};$$

- 8)  $A_2$  – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

- 9)  $A_3$  – множество функций, сохраняющих предикат  $R_3$ , определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & - & 1 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \end{pmatrix};$$

- 10)  $A_4$  – множество функций, сохраняющих предикат  $R_4$ , определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 & - & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & - & 0 & - \end{pmatrix};$$



11)  $A_5$  – множество, состоящее из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций, принимающих два значения, одно из которых есть  $-$ .

Множество  $L^-$  будем называть множеством всех линейных гиперфункций ранга 2. Множество  $B$  называется полным в  $L^-$ , если  $[B] = L^-$ . Через  $K_0$  обозначим множество  $F^1 \cup \{-\}$ , через  $K_1$  – множество  $S^- \cap L^-$ , через  $K_2$  – множество  $L_0 \cup \{-\}$ , через  $K_3$  – множество  $L_1 \cup \{-\}$ .

Через  $\oplus$  обозначается линейная булева функция от двух переменных. Отметим, что все определения, которые отсутствуют здесь, необходимые для понимания статьи, можно найти в [2].

## 2. Критерий полноты и описание субмаксимальных ультраклонов в множестве всех линейных гиперфункций.

**Теорема 1.** *Множество  $B \subseteq L^-$  является полным в  $L^-$  тогда и только тогда, когда  $B \not\subseteq L$ ,  $B \not\subseteq K_0$ ,  $B \not\subseteq K_1$ ,  $B \not\subseteq K_2$ ,  $B \not\subseteq K_3$ .*

**Теорема 2.** *Существует ровно 5 субмаксимальных ультраклонов  $L$ ,  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , содержащихся в  $L^-$ .*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пантелеев В. И.* Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. 2009. 2, № 68. С. 60–79.
2. *Перязев Н. А.* Основы теории булевых функций. М. : Физматлит, 1999. 112 с.

Шаранхаев Иван Константинович  
Бурятский государственный университет (БГУ)  
E-mail: goran5@mail.ru



## О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И КОНЕЧНЫХ СУММАХ

© 2023 г. Т. А. ШИРЯЕВА, А. К. ШЛЕПКИН, А. А. ШЛЕПКИН, К. А. ФИЛИППОВ

Аннотация. В работе приведена формула суммирования  $k$  степеней первых  $n$  членов натурального ряда.

**Ключевые слова:** система линейных уравнений, конечная сумма.

**AMS Subject Classification:** 11-11

В [1–3] рассматривалась задача суммирования  $k$ -ых степеней первых  $n$  членов натурального ряда на основе рекуррентного метода «треугольников» основанного на некоторых геометрических соображениях. Были получены формулы вычисляющие указанные суммы до показателя  $k = 9$  включительно. Анализ этих формул привел к методу позволяющему отказаться от рекуррентности получать искомую формулу сразу для  $k \leq 14$ . Данный метод суммирования основан на представлении указанных сумм в виде многочлена от  $n$ , коэффициенты которого являются единственным решением системы линейных уравнений специального вида. На основе данного метода доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $n, k$  – натуральные числа,  $k \leq 20$ ,  $[\frac{k}{2}]$  – целая часть числа  $\frac{k}{2}$ ,  $i, j, d$  независимо принимают все значения из интервала  $\mathbf{N} \cap [1, [\frac{k}{2}]]$ . Положим

$$S_n^{(k)} = 1^k + \dots + n^k = \sum_{m=1}^n m^k.$$

Имеет место следующая формула суммирования

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} a_{(k,j)}n^{k+1-2j},$$

где

$$a_{(k,j)} = \frac{\Delta_{(k,j)}}{\Delta_{(k)}},$$

$$\Delta_{(k)} = |i^{k+1-2j}| = |\alpha_{(i,j)}|,$$

$$\Delta_{(k,j)} = |\beta_{(i,d)}|,$$

$$\beta_{(i,d)} = \alpha_{(i,d)}, \text{ если } j \neq d,$$

$$\beta_{(i,d)} = S_i^{(k)} - \left(\frac{1}{k+1}i^{k+1} + \frac{1}{2}i^k\right), \text{ если } j = d.$$

С учетом утверждения теоремы 1 и формул из [1–3] выведены следующие формулы, которые хорошо известны и получены ранее различными авторами и другими методами.

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad (1)$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad (2)$$

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \quad (3)$$

$$S_n^{(4)} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \quad (4)$$

$$S_n^{(5)} = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \quad (5)$$

$$S_n^{(6)} = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \quad (6)$$

$$S_n^{(7)} = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \quad (7)$$

$$S_n^{(8)} = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \quad (8)$$

$$S_n^{(9)} = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \quad (9)$$

$$S_n^{(10)} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n \quad (10)$$

$$S_n^{(11)} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^2 \quad (11)$$

$$S_n^{(12)} = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n \quad (12)$$

$$S_n^{(13)} = \frac{1}{14}n^{14} + \frac{1}{2}n^{13} + \frac{13}{12}n^{12} - \frac{143}{60}n^{10} + \frac{143}{28}n^8 - \frac{143}{20}n^6 + \frac{65}{12}n^4 - \frac{691}{420}n \quad (13)$$

$$S_n^{(14)} = \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^9 - \frac{143}{10}n^7 + \frac{91}{6}n^5 - \frac{691}{90}n^3 + \frac{7}{6}n \quad (14)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяева Т. А., Шлёпкин А. К., Шлепкин А. А., Филиппов К. А., Рыбакова У. С.* О конечных суммах и системах линейных уравнений /// Информационные технологии и математическое моделирование : избр. ст. 11-й науч. интернет-конф. с междунар. участием / под ред. С. И. Сенашова ; СибГУ им. М.Ф. Решетнева: Университет Гвадалахары. Красноярск, 2021. С. 56–64.
2. *Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Филиппов К. А., Шлепкин А. А.* О формулах суммирования конечных сумм специального вида /// Актуальные вопросы прикладной дискретной математики. Вып. 8 : сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 120–125.
3. *Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Филиппов К. А., Шлепкин А. А.* О конечных суммах /// Динамические системы и компьютерные науки: теория и предложения (DYSC 2022) : материалы 4-й Междунар. конф. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 148–149.

Ширяева Тамара Алексеевна

Красноярский государственный аграрный университет (Красноярский ГАУ)

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнева (СибГУ)

E-mail: [tas\\_sfu@mail.ru](mailto:tas_sfu@mail.ru)

Шлепкин Анатолий Константинович

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнева (СибГУ)

E-mail: [ak\\_kgau@email.ru](mailto:ak_kgau@email.ru)

Шлепкин Алексей Анатольевич

Сибирский федеральный университет (СФУ)

E-mail: [shlyopkin@mail.ru](mailto:shlyopkin@mail.ru)

Филиппов Константин Анатольевич

Сибирский федеральный университет (СФУ)

E-mail: [filippov\\_kostya@email.ru](mailto:filippov_kostya@email.ru)



О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ  
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛЕНИЯ СМЕСЕЙ  
В РЕКТИФИКАЦИОННОЙ КОЛОННЕ

© 2023 г. А. В. АРГУЧИНЦЕВ, Д. Е. КОПЫЛОВ

Аннотация. При моделировании процессов разделения смесей в ректификационной колонне возникает необходимость численного решения системы гиперболических уравнений первого порядка с нестандартными краевыми условиями. В работе реализован численный метод характеристик для решения соответствующей начально-краевой задачи. Приведены результаты расчетов для иллюстративного примера.

**Ключевые слова:** ректификационная колонна, гиперболическая система, разностная схема, метод характеристик.

**AMS Subject Classification:** 80M20

1. **Модель ректификационной колонны.** Математическая модель ректификационной колонны представляет из себя уравнения, описывающие тепломассообмен и гидродинамику взаимодействующих потоков [3, 4]:

$$\frac{\partial H_x x_i}{\partial t} - \frac{\partial L x_i}{\partial s} = k_{y_i}(y_i - y_i^*) + \Phi_{x_i}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_y y_i}{\partial t} + \frac{\partial V y_i}{\partial s} = k_{y_i}(y_i^* - y_i) + \Phi_{y_i}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \sum_{i=1}^N y_i = 1, i = 1, 2, \dots, N; \quad (3)$$

$$\frac{d(H_x(s_0, t)y_i(s_0, t))}{dt} = L(s_0, t)x_i(s_0, t) - (V(s_0, t) + W(t))y_i(s_0, t), \quad (4)$$

$$x_i(s_0, t_0) = x_{i0}(s_0), i = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{dH_x(s_0, t)}{dt} = L(s_0, t) - V(s_0, t) - W(t), \quad H_x(s_0, t_0) = H_{xk0};$$

$$\frac{dH_x(s_1, t)x_i(s_1, t)}{dt} = V(s_1, t)y_i(s_1, t) - (L(s_1, t) + D(t))x_i(s_1, t), \quad (5)$$

$$x_i(s_1, t_0) = x_{i0}(s_1), i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{dH_x(s_1, t)}{dt} = V(s_1, t) - (L(s_1, t) + D(t)), \quad H_x(s_1, t_0) = H_{xd0}.$$

Здесь  $x_i = x_i(s, t)$ ,  $y_i = y_i(s, t)$  – концентрация  $i$ -го компонента в жидкой и паровой фазах;  $L = L(s, t)$ ,  $V = V(s, t)$  – потоки жидкости и пара в колонне;  $H_x = H_x(s, t)$ ,  $H_y = H_y(s, t)$  – удерживающая способность колонны по жидкости и пару;  $\Phi_{x_i} = \Phi_{x_i}(s, t)$ ,  $\Phi_{y_i} = \Phi_{y_i}(s, t)$  – плотность вводимых потоков  $i$ -го компонента в жидкой и паровой фазах;  $s \in [s_0, s_1]$  – пространственная координата;  $t \in [t_0, t_1]$  – время;  $k_{y_i} = kV(s, t)$ ,  $k = const$  – коэффициент массопередачи в паровой фазе;  $y_i^*(s, t) = \tilde{p}(s, t)x_i(s, t)$  – концентрация паровой компоненты в равновесной ситуации, функция  $\tilde{p}(s, t)$  определяется из эксперимента;  $D(t)$ ,  $W(t)$  – готовый продукт.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, <https://rscf.ru/project/23-21-00296/>.

В работе делаются следующие допущения.

1. Сырье подается только в виде жидкости:

$$\Phi_{x_i}(s, t) = x_{f_i} F_x(t) \phi_{x_i}(s),$$

где  $x_{f_i}$  – концентрация компонента,  $F_x(t)$  – вводимый поток,  $\phi_{x_i}(s)$  – распределение потока по колонне.

2. Зависимость удерживающей способности прямо пропорциональна потоку:

$$H_x(s, t) = \frac{1}{c_1} L(s, t), \quad H_y(s, t) = \frac{1}{c_2} V(s, t).$$

3. Потоки пара и жидкости зависят только от времени:

$$V(s, t) = V(t), \quad L(s, t) = L(t) + L^*(t),$$

$$L^*(t) = \begin{cases} F_x(t), & s < s_* - \sigma \\ F_x(t) \int_{s_* - \sigma}^{s_* + \sigma} \psi_{x_i}(s) ds, & s_* - \sigma \leq s \leq s_* + \sigma, \\ 0, & s > s_* + \sigma. \end{cases}$$

4. Колонна работает в статическом режиме:

$$F_x(t) = D(t) + W(t).$$

5. Удерживающая способность конденсатора и испарителя не меняются со временем:

$$H_x(s_1, t) = H_{xk} \equiv const, \quad H_x(s_0, t) = H_{xd} \equiv const, \quad t \in [t_0, t_1].$$

С учетом сделанных допущений (1) – (5) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial x_i(s, t)}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x_i(s, t)}{\partial s} = B_{11}(s, t) x_i(s, t) + B_{12}(s, t) y_i(s, t) + b_1(s, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial y_i(s, t)}{\partial t} + c_2 \frac{\partial y_i(s, t)}{\partial s} = B_{21}(s, t) x_i(s, t) + B_{22}(s, t) y_i(s, t) + b_2(s, t), \quad (7)$$

$$\frac{dx_i(s_1, t)}{dt} = g_1(u(t), t) (y_i(s_1, t) - x_i(s_1, t)), \quad x_i(s_1, t_0) = x_{i0}(s_1), \quad (8)$$

$$\frac{dy_i(s_0, t)}{dt} = g_2(u(t), t) (x_i(s_0, t) - y_i(s_0, t)), \quad y_i(s_0, t_0) = y_{i0}(s_0), \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i(s, t) = 1, \quad \sum_{i=1}^N y_i(s, t) = 1,$$

$$x_i(s, t) > 0, \quad y_i(s, t) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$B_{11}(s, t) = \frac{c_1 F_x \phi_{x_i}(s) - c_1 k V(t) \tilde{p}(s, t) - (L(t) + L^*(t))'}{L(t) + L^*(t)},$$

$$B_{22}(s, t) = -(k c_2 + \frac{V'(t)}{V(t)}),$$

$$B_{21}(s, t) = c_2 k \tilde{p}(s, t), \quad B_{12}(s, t) = \frac{c_1 k V(t)}{L(t) + L^*(t)},$$

$$b_1(s, t) = \frac{c_1 F_x(t) \phi_{x_i}(s)}{L(t) + L^*(t)}, \quad b_2(s, t) = 0.$$

$$g_1(u(t), t) = \frac{L(t) + u(t)}{H_{xd}}, \quad g_2(u(t), t) = \frac{V(t) + F_x(t) - u(t)}{H_{xk}}$$

**2. Численное решение.** Дифференциальные уравнения (6)–(7) образуют систему линейных гиперболических уравнений с двумя семействами характеристик  $-c_1t + const$  и  $c_2t + const$ , где константы определяются начальными точками характеристик. Нестандартность задачи заключается в форме краевых условий (8)–(9). Это не просто смешанные условия на границах области. Значение компонент на каждой из границ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений, в правой части которых фигурируют не только эти компоненты, но и значения решения на противоположной границе. Поэтому невозможно сначала решить задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на боковых границах, а затем интегрировать систему гиперболических уравнений.

Для решения начально-краевой задачи (6)–(9) предложена комбинация численного метода характеристик решения гиперболической системы и классического метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений на границах с постепенным переходом от нижних к верхним слоям по времени. При численном интегрировании используется схема Эйлера с пересчетом, что обеспечивает второй порядок точности и устойчивость разностной схемы.

Далее приведем результаты решения иллюстративного примера с использованием языка программирования Python 3.

Решение проводилось для следующих параметров:

$$s \in [0, 2], \quad t \in [0, 4], \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 3,$$

$$B_{11}(s, t) = 1, \quad B_{12}(s, t) = -\frac{1}{e^s}, \quad B_{21}(s, t) = e^s, \quad B_{22}(s, t) = c_2,$$

$$g_1(t) = \frac{-\sin(t)}{e^2(\sin(t) + 2\cos(t)) - 4 - \cos(t)}, \quad g_2(t) = \frac{2\sin(t) - \cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)},$$

$$b_1(s, t) = -2c_1s - s^2 + \cos(t), \quad b_2(s, t) = -2e^s \sin(t) - e^s s^2,$$

$$x_0(s) = s^2 + 1, \quad y_0(s) = 2e^s$$

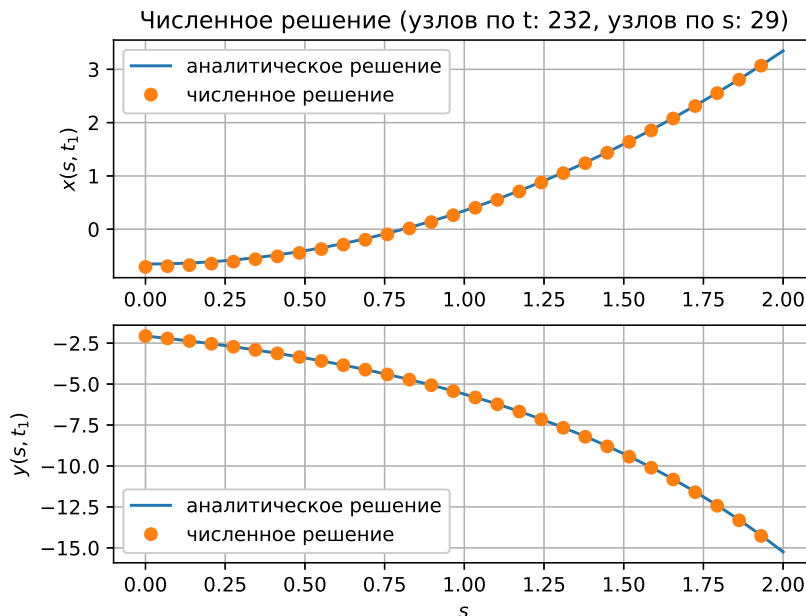


Рис. 1. Численное и аналитическое решения

Для данной задачи имеется следующее аналитическое решение:

$$x^*(s) = s^2 + \cos(t), \quad y^*(s) = e^s(\sin(t) + 2\cos(t))$$

$$\max_{s \in [0,2]} |x(s, t_1) - x^*(s)| = 0,052; \quad \max_{s \in [0,2]} |y(s, t_1) - y^*(s)| = 0,035$$

Рисунок 1 показывает отличное совпадение численного и аналитических решений.

**3. Заключительные замечания.** В качестве дальнейшего направления исследований планируется рассмотреть задачи оптимального управления в модели (6)–(9). Управляющими воздействиями могут быть объемы отбираемых готовых продуктов  $u(t)$  в (8) и (9), а целью управления – достижение заданных концентраций полезных продуктов в выходных потоках. В [2] задачи такого рода рассматривались в классе гладких допустимых управлений. С точки зрения авторов, возможно использование методики [1] для работы в классе разрывных управляющих воздействий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 186 с.
2. *Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Оптимальное управление процессом ректификации в колонне // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2011. 3. С. 32–41.
3. *Демиденко Н. Д., Кулагина Л. В.* Оптимальное управление технологическим процессом в ректификационных установках // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2017. 10, № 1. С. 95–105.
4. *Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И.* Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск : Наука, 2006. 551 с.

Аргучинцев Александр Валерьевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: arguch@math.isu.ru

Копылов Даниил Евгеньевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: it-daniil@yandex.ru





## АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОЛЕМ ПРИТЯЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ОДИНАКОВЫХ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

© 2023 г. А. А. БУРОВ, Е. А. НИКОНОВА

**Аннотация.** В работе обсуждается такая аппроксимация потенциала притяжения твёрдого тела, что масса системы точек, ее центр масс и компоненты тензора инерции совпадают с соответствующими величинами твердого тела, и при этом моменты инерции третьего порядка точечной системы масс и твердого тела приближаются друг к другу в квадратичном смысле. Рассматривается пример построения такой системы точек для приближения поля притяжения астероида Психея (16).

**Ключевые слова:** моменты инерции твёрдого тела, равномоментные системы тел, приближение потенциала притяжения, астероид (16) Психея.

**AMS Subject Classification:** 70F15

**1. Разложение гравитационного потенциала.** Рассматривается твердое тело  $\mathcal{B}$  и связанная с ним система отсчета  $Ox_1x_2x_3$ . Потенциал силы гравитационного притяжения  $U_N$  в этой системе координат в общем виде может быть представлен как (см., например, [1])

$$U_N = -G \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{k_1+k_2+k_3=k} I_{k_1k_2k_3} \frac{(-1)^k}{k_1!k_2!k_3!} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \left( \frac{1}{r} \right) \right), \quad (1)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – неотрицательные целые числа,  $G$  – гравитационная постоянная,  $I_{k_1k_2k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3} dm$  – момент распределения массы порядка  $k = k_1 + k_2 + k_3$ ,  $(X_1, X_2, X_3)^T$  – радиус-вектор элементарной массы  $dm$  тела  $\mathcal{B}$ ,  $r = (x_1, x_2, x_3)^T$  – расстояние от центра масс тела до изучаемой точки.

Первое слагаемое разложения (1) (при  $k = 0$ ) представляет собой потенциал притяжения материальной точки. Первые два слагаемых (при  $k = 0$  и  $k = 1$ ) в произвольных осях описывают также поправку на смещение центра масс тела. В осях же связанных с центром масс тела, поправка обращается в нуль. Если в разложении (1) рассмотреть первые три слагаемых (при  $k = 0, 1, 2$ ), то такое разложение в качестве коэффициентов будет содержать также значения главных центральных моментов инерции.

**2. Система точечных масс, равномоментная твердому телу.** Согласно Э.Дж.Раусу ([4]) две системы тел называются равномоментными, если их моменты инерции относительно всех прямых равны один другому. Системы тел будут также равномоментны, если совпадают массы тел, положения их центров масс и их тензоры инерции.

Известно ([4–7, 9, 12, 13]), что тензор инерции любого твердого тела совпадает с тензором инерции некоторой системы из четырех одинаковых точечных масс. Допустим, эта система четырех точек одинаковых масс была выбрана некоторым образом. Двенадцать координат этих четырех точек должны удовлетворять девяти соотношениям: три соотношения для совпадения центров масс и шесть соотношений для совпадения компонентов матриц инерции. То есть имеет место неоднозначность выбора точек.

Далее обсуждается вопрос о построении системы четырех точечных масс такой, что: 1) система точечных масс будет равномоментна твердому телу; 2) система точечных масс будет приближать

в квадратичном смысле компоненты тензора инерции третьего порядка. Тогда поле притяжения выбранной системы точек приближало бы поле притяжения твердого тела вплоть до третьего порядка в некотором смысле наилучшим образом. Данная задача является актуальной при рассмотрении разложения в ряд Лапласа потенциала притяжения небесных тел (см., например, [1,2]).

Э.Дж. Раусс ([4]) приводит пример построения системы четырех точек, равномоментной данному твердому телу, основанный на преобразованиях координат вершин правильного тетраэдра. Эллипсоид инерции правильного тетраэдра с равными массами в вершинах, вписанного в сферу радиуса  $\sqrt{3}$ , является единичной сферой. Проекция этой сферы в эллипсоид с полуосями, равными  $\sqrt{I_{200}/m}$ ,  $\sqrt{I_{020}/m}$ ,  $\sqrt{I_{002}/m}$ , вычисленными относительно главных центральных осей инерции тела, переводит правильный тетраэдр в новый, а система масс, находящаяся в вершинах этого нового тетраэдра, будет равномоментной твердому телу.

Неоднозначность выбора системы четырех точечных масс обуславливается выбором тетраэдра  $\mathcal{T}$  с точностью до поворота около его барицентра. Пусть  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$  – связанная с телом  $\mathcal{B}$  правая декартова система координат, оси которой сонаправлены с его главными осями инерции. Ориентацию правильного тетраэдра  $\mathcal{T}$  в системе  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$  будем определять самолётными углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (см., например, [3]). Фиксируя ориентацию тетраэдра  $\mathcal{T}$ , выполним преобразование радиусов-векторов его вершин, применив к ним отображение с матрицей  $\mathbf{A} = \text{diag}(\sqrt{I_{200}/m}, \sqrt{I_{020}/m}, \sqrt{I_{002}/m})$ , тем самым получим систему четырех точечных массы, равномоментную телу  $\mathcal{B}$ .

Выбор углов  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$  и  $\gamma_*$  должен осуществляться таким образом, чтобы моменты распределения массы третьего порядка построенной равномоментной системы точечных масс менее всего отличались бы от соответствующих моментов распределения массы третьего порядка тела  $\mathcal{B}$ . Для решения переопределенной системы, состоящей из десяти нелинейных тригонометрических уравнений, зависящих от трех неизвестных величин  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$  и  $\gamma_*$ , формулируется оптимизационная задача.

**3. Определение оптимальных значений углов.** Пусть  $\hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{r}}_i(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – радиусы-векторы вершин тетраэдра  $\mathcal{T}$  в системе координат  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$ . Тогда  $\mathbf{r}_i = \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_i = R \cdot (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})^T$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – радиусы-векторы материальных точек, образующих систему, равномоментную телу  $\mathcal{B}$ ,  $R$  – радиус шара, заключающего в себе объем, равный объему тела  $\mathcal{B}$ .

Задача определения значений  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$ ,  $\gamma_*$ , основана на минимизации суммы квадратов отклонений моментов распределения массы порядка вплоть до  $k$  системы точечных масс от соответствующих моментов распределения массы тела  $\mathcal{B}$ . Если

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^N \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left( \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 r_{i1}^{k_1} r_{i2}^{k_2} r_{i3}^{k_3} - \frac{I_{k_1 k_2 k_3}}{m R^k} \right)^2, \quad (2)$$

то

$$\mathcal{L} \rightarrow \min_{\alpha, \beta, \gamma}.$$

Отметим, что при  $N \leq 2$  функционал  $\mathcal{L}$  тождественно равен нулю, т.е. принимает своё минимальное значение при любых значениях углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

**4. Нахождение минимального значения функции методом роя частиц.** Для численного отыскания минимума функции (2) применяется метод роя частиц [8, 10]. Этот метод состоит в следующем. Пусть ищется минимум функции  $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in V$ , где  $V$  – некоторая область поиска в  $\mathbf{R}^n$ . Область  $V$  случайным образом “засевается” точками  $P_1, \dots, P_N$ , образующими рой из  $N$  частиц. Это так называемый этап инициализации алгоритма. Цикл алгоритма, фактически, состоит из двух шагов. На первом шаге цикла вычисляются и запоминаются значения функции  $\mathcal{L}(\mathbf{x})$  в точках, занимаемых частицами  $P_1, \dots, P_N$ . На втором шаге алгоритма частицы перемещаются в новые точки и цикл повторяется. Частица  $P_\ell$  перемещается в точку  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k+1}$ , где

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + a_1 \cdot \text{rnd}() \cdot (p^{\text{best}} - \mathbf{x}_k) + a_2 \cdot \text{rnd}() \cdot (g^{\text{best}} - \mathbf{x}_k),$$

где  $\mathbf{x}_k$  и  $\mathbf{v}_k$  – векторы положения и скорости частицы  $P_\ell$  на шаге  $k$  (на этапе инициализации алгоритма вектор  $\mathbf{v}_0$  каждой частицы роя задаётся случайным образом);  $a_1, a_2$  – весовые коэффициенты, задающиеся эмпирически в рамках конкретной задачи;  $p^{best}$  – лучшая найденная частицей  $P_\ell$  точка;  $g^{best}$  – лучшая точка из найденных всеми частицами роя; функция  $rnd()$  возвращает случайное число из отрезка от 0 до 1.

Критерием завершения алгоритма служит критическая малость изменения величины  $g^{best}$  от текущего шага к следующему.

**5. Пример: приближение поля притяжения астероида (16) Психея полем притяжения четвёрки одинаковых точечных масс.** Для вычисления инерциальных характеристик астероида (16) Психея в предположении о постоянстве его плотности используется триангуляционная сетка, состоящая из 1148 вершин и 2292 граней, заданных в некоторой системе координат  $SX_1X_2X_3$  [11].

Прежде всего вычисляются объём, радиус шара такого же объёма и положение центра масс астероида:

$$V_B = \mathbf{I}_0/\rho = 6.07403 \cdot 10^6 \text{ км}^3, \quad R \approx 113.18691 \text{ км},$$

$$\vec{SO} = \mathbf{I}_1/m = (-0.68149, -0.13468, 0.79429)^T \text{ км}.$$

В осях  $OX_1X_2X_3$  компоненты тензора  $\mathbf{I}_2$ , отнесённые к массе ядра кометы, имеют вид (в  $\text{км}^2$ )

$$\mathbf{I}_2/m = \begin{pmatrix} 3602.78985 & -42.88478 & -22.23882 \\ -42.88478 & 2627.09784 & 4.96449 \\ -22.23882 & 4.96449 & 1798.2984 \end{pmatrix}.$$

Единичные, образующие правую тройку собственные векторы этого тензора в тех же осях имеют вид

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.99896 \\ -0.43874 \\ -0.12417 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.43936 \\ 0.99902 \\ 0.48160 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0.12194 \\ -0.53566 \\ 0.99991 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы задают главные центральные оси инерции, определяющие базис  $Ox_1x_2x_3$ . Отнесённые к массе ядра кометы главные центральные моменты инерции имеют вид (в  $\text{км}^2$ )

$$J_1/m = 4423.23634, \quad J_2/m = 5402.95035, \quad J_3/m = 6230.18549$$

Компоненты тензоров  $\mathbf{I}_3/m$ , выписанные в осях  $Ox_1x_2x_3$ , приведены в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1. Компоненты тензора  $\mathbf{I}_3/m$  (в  $\text{км}^3$ ).

$I_{300} = -5883.70402$	$I_{021} = -1089.82977$	$I_{012} = -108.02882$	$I_{030} = 8696.66097$
$I_{102} = 2000.22201$	$I_{111} = 462.14126$	$I_{003} = 1551.22562$	$I_{201} = -2042.90032$
$I_{210} = -10272.57962$	$I_{120} = 2175.21444$		

При реализации метода роя частиц принимались следующие значения весовых коэффициентов  $a_1 = 0.9, a_2 = 0.9$ . В качестве остановки алгоритма принимается условие того, что на протяжении 20 итераций изменение значения функционала не превосходит  $10^{-15}$ . Алгоритм завершил работу за 124 итерации. Найденное минимальное значение составило  $\mathcal{L}(-0.0078491; 0.00492926; -0.03710693) = 0.00815954704$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 800 с.
2. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М. : Высшая школа, 1970. 712 с.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 824 с.
4. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел : пер. с англ. В 2 т. Т. 1 / под ред. Ю. А. Архангельского, В. Г. Дёмина. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 464 с.
5. *Franklin Ph.* Equipomental systems // *Studies in Applied Mathematics*. 1929. 8, № 1–4. P. 129–140.
6. *Gil Chica F. J., Pérez Polo M., Pérez Molina M.* Note on an apparently forgotten theorem about solid rigid dynamics // *European Journal of Physics*. 2014. 35, № 4. P. 045003(1)–045003(5).
7. *Huang N. C.* Equipomental system of rigidly connected equal particles // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1993. 16, № 6. P. 1194–1196.
8. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, Perth, WA, Australia. 1995. 4. P. 1942–1948.
9. *Loudon W. L.* An elementary treatise on rigid dynamics. New York, London : The Macmillan Company, 1896. 264 pp.
10. *Poli R., Kennedy J., Blackwell T.* Particle swarm optimization: an overview // *Swarm Intelligence*. 2007. 1. P. 33–57.
11. *Shepard M. K., Richardson J., Taylor P. A., et al.* Radar observations and shape model of asteroid 16 Psyche // *Icarus*. 2017. 281. P. 388–403.
12. *Sommerville D. M. Y.* Equipomental tetrads of a rigid body // *Math. Notes*. 1930. 26. P. 10–11.
13. *Talbot A.* Equipomental systems // *The Mathematical Gazette*. 1952. 36, № 316. P. 95–110.

Буров Александр Анатольевич

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН)

E-mail: [jtm@narod.ru](mailto:jtm@narod.ru)

Никонова Екатерина Александровна

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН).

E-mail: [nikonova.ekaterina.a@gmail.com](mailto:nikonova.ekaterina.a@gmail.com)



## МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА МАЛОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА

© 2023 г. А. А. БУРОВ, В. И. НИКОНОВ

**Аннотация.** На примере астероида (21) Лютеция иллюстрируется подход к построению мультипольного представления гравитационного потенциала малых небесных тел с нерегулярным распределением масс.

**Ключевые слова:** приближение поля притяжения, астероиды, Максвеллово представление сферической функции, мультиполь.

**AMS Subject Classification:** 70F15

**Введение.** Многие малые небесные тела, такие как астероиды и ядра комет, характеризуются нерегулярной формой и сложным распределением масс. При исследовании движения в окрестности таких тел одной из ключевых задач является изучение структуры порождаемого ими поля притяжения, а вместе с этим, и характеристической функции поля – её потенциала. Для описания такого потенциала как правило используют приближения, опирающиеся либо на ряды Лапласа (см., например, [4], а также [1] и цитируемую там литературу), либо на метод Вернера – Ширса [14, 15], либо на так называемые масконы (см., например, [8]).

В настоящей работе основное внимание сосредоточено на восходящем к Максвеллу подходе [3, 6, 11], мультипольного представления потенциалов, в частности, потенциала поля притяжения. Ставится задача отыскания мультипольных осей и моментов для тела, поверхность которого задана триангуляционной сеткой. Соответствующие вычисления для различных, вплоть до четвертого порядка, мультиполей выполняются для астероида (21) Лютеция.

### 1. Гравитационный потенциал тела как комбинация потенциалов мультиполей.

Пусть  $\mathcal{B}$  – произвольное твёрдое тело массы  $M$ . Обозначим  $Ox_1x_2x_3$  связанную с ним прямоугольную систему координат. Потенциал создаваемого им поля силы ньютоновского притяжения  $U(\mathbf{r})$  в точке  $P : \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$  определяется как

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dM(\mathbf{x})}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{x})}},$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $dM(\mathbf{x})$  – элемент массы в точке тела, задаваемой вектором  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ . Интегрирование осуществляется по всему телу  $\mathcal{B}$ .

Как известно (см., например, [4, 5]), во внешних по отношению к телу  $\mathcal{B}$  точках пространства потенциал может быть представлен в виде разложения:

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2},$$

где функции  $Y_n$  представимы либо в виде

$$Y_n(\mathbf{r}) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{(-1)^n}{k_1!k_2!k_3!} I_{k_1k_2k_3} r^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial r_1^{k_1} \partial r_2^{k_2} \partial r_3^{k_3}} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (1)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – целые неотрицательные числа,  $I_{k_1 k_2 k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dM(\mathbf{x})$  – интегралы инерции порядка  $n$ , либо, согласно Максвеллу [11] (см. также [3, 5, 6]), в виде

$$Y_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{p_n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2 \dots \partial \mathbf{h}_n} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}_n}$  – дифференцирование вдоль единичного вектора  $\mathbf{h}_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T$ ,  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $p_n$  – постоянные положительные величины, характеризующие распределение масс в теле. Функции (2) характеризуют потенциал мультиполю  $n$ -го порядка – специального точечного объекта, ставшим уже классическим предметом исследований в земной геодезии [16, 17] (см. также [7]). Постоянные  $p_n$  называют моментами функции  $Y_n(\mathbf{r})$ , векторы  $\mathbf{h}_i$  – её осями. Свойствам мультиполей и их физической интерпретации посвящены многочисленные исследования (см., например, [3, 5, 6, 11]). Для каждого конкретного тела, в нашем случае – для астероида (21) Лютеция – ставится задача определения направлений  $\mathbf{h}_k$  и моментов  $p_k$ .

**2. Методика определения осей мультиполю и его момента.** Согласно Сильвестру [12, 13] (см. также [3]), вычисление осей мультиполю сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} Y_n(\mathbf{r}) = 0, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где величина  $Y_n(\mathbf{r})$  определяется соотношением (1). Следуя [6], для решения системы (3) выполним подстановку

$$r_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}v, \quad r_2 = \frac{2u}{1+u^2}v, \quad r_3 = iv, \quad (4)$$

где  $u \in (-\infty; +\infty)$ ,  $v \in (-\infty; +\infty)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . В результате рациональной параметризации (4) второе из уравнений системы (3) оказывается выполненным тождественно, и задача сводится к изучению первого уравнения системы (3), в новых переменных имеющего вид  $\left( \frac{v}{(u^2+1)} \right)^n$ .

$P_{2n}(u) = 0$ . Отбрасывая тривиальное решение  $v = 0$ , приходим к задаче определения корней многочлена  $P_{2n}(u)$  степени  $2n$  относительно переменной  $u$  с комплексными коэффициентами. Уравнения

$$P_{2n}(u) = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_2(u) &= \sigma_{10}u^2 + \sigma_{11}u - \overline{\sigma_{10}} = 0, & \sigma_{10} &= I_{100} - iI_{001}, & \sigma_{11} &= -2I_{010}. \\ P_4(u) &= \sigma_{20}u^4 + \sigma_{21}u^3 + \sigma_{22}u^2 - \overline{\sigma_{21}}u + \overline{\sigma_{20}} = 0, \\ \sigma_{20} &= \frac{3}{2}(I_{002} - I_{200}) + 3iI_{101}, & \sigma_{21} &= 6(I_{110} - iI_{011}), & \sigma_{22} &= 2(I_{200} + I_{002} - 2I_{020}). \\ P_6(u) &= \sigma_{30}u^6 + \sigma_{31}u^5 + \sigma_{32}u^4 + \sigma_{33}u^3 - \overline{\sigma_{32}}u^2 + \overline{\sigma_{31}}u - \overline{\sigma_{30}} = 0, \\ \sigma_{30} &= \frac{5}{2}(I_{300} - 3I_{102} + i(I_{003} - 3I_{201})), & \sigma_{31} &= 15(I_{012} - I_{210} + 2iI_{111}), \\ \sigma_{32} &= \frac{15}{2}(4I_{120} - I_{102} - I_{300} - i(4I_{021} - I_{003} - I_{201})), & \sigma_{33} &= 10(3I_{012} + 3I_{210} - 2I_{030}). \\ P_8(u) &= \sigma_{40}u^8 + \sigma_{41}u^7 + \sigma_{42}u^6 + \sigma_{43}u^5 + \sigma_{44}u^4 - \overline{\sigma_{43}}u^3 + \overline{\sigma_{42}}u^2 - \overline{\sigma_{41}}u + \overline{\sigma_{40}} = 0, \\ \sigma_{40} &= \frac{35}{8}(6I_{202} - I_{400} - I_{004} + 4i(I_{301} - I_{103})), & \sigma_{41} &= 35(I_{310} - 3I_{112} + i(I_{013} - 3I_{211})), \\ \sigma_{42} &= \frac{35}{2}(I_{400} - I_{004} + 6I_{022} - 6I_{220} + 2i(6I_{121} - I_{103} - I_{301})), \\ \sigma_{43} &= 35(4I_{130} - 3I_{112} - 3I_{310} - i(4I_{031} - 3I_{211} - 3I_{013})), \\ \sigma_{44} &= 70(3I_{220} + 3I_{022} - I_{040}) - \frac{105}{4}(I_{400} + I_{004} + 2I_{202}). \end{aligned}$$

Здесь и далее черта над коэффициентом означает операцию комплексного сопряжения.

Для всех различных пар корней  $u_1$  и  $u_2$  многочлена  $P_{2n}(u)$ , рассмотрим формы

$$A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \frac{1-u_1^2}{1+u_1^2} & \frac{2u_1}{1+u_1^2} & i \\ \frac{1-u_2^2}{1+u_2^2} & \frac{2u_2}{1+u_2^2} & i \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

линейные относительно  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $\xi_3$ . Выберем из них лишь те, для которых коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  из соотношения (6) являются вещественными. Согласно [6, 12, 13], таких пар будет ровно  $n$ . Обозначим отвечающие им коэффициенты  $(A_k, B_k, C_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  соответственно. Тогда оси мультиполей определяются соотношениями

$$\mathbf{h}_k = \frac{1}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}} \cdot (A_k, B_k, C_k)^T, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Далее, для вычисления мультипольных моментов  $p_n$  приравняем правые части соотношений (1) и (2). Величины  $p_n$  определяются из соотношений, получающихся в результате подстановки координат произвольной точки пространства, а также вычисленных осей. Принимая во внимание то обстоятельство, что момент  $p_n$  должен быть положительной величиной [3, 6], в случае необходимости изменяют направление одного из векторов  $\mathbf{h}_k$  на противоположное.

**3. Пример. Астероид (21) Лютетия.** Опираясь на описанную выше методику, построим мультипольное представление потенциала гравитационного поля астероида (21) Лютетия вплоть до слагаемых порядка  $n = 4$ .

Для вычисления инерциальных характеристик астероида (21) Лютетия в предположении о постоянстве его плотности  $\rho = 3400 \text{ кг/м}^3$  используется предложенная в [10] триангуляционная сетка, содержащая 1483 вершины и 2962 грани, заданных в некоторой жёстко связанной с астероидом системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

В рамках принятой модели эффективный радиус тела, т.е. радиус сферы, объём которой равен объёму тела, равен  $R_e = 49.08 \text{ км}$ . Следуя [2, 9], вычислим моменты инерции астероида (21) Лютетия вплоть до пятого порядка, чтобы используя эти значения, определить оси соответствующих мультиполей и их моменты.

Анализ линейных форм (6) позволяет получить следующие моменты и координаты осей мультиполей:

$$\begin{aligned} p_1 = 0.06680313231, \quad \alpha_1 = 0.4926222827, \quad \beta_1 = 0.8208710923, \quad \gamma_1 = 0.2889531727, \\ p_2 = 0.1951741808, \quad \alpha_1 = 0.5331884764, \quad \beta_1 = 0.6283982087, \quad \gamma_1 = -0.5664148127, \\ \alpha_2 = 0.4931133777, \quad \beta_2 = 0.6056918947, \quad \gamma_2 = 0.6244810051, \\ p_3 = 0.0586979969, \quad \alpha_1 = 0.9957126469, \quad \beta_1 = -0.0638866665, \quad \gamma_1 = 0.0668940836, \\ \alpha_2 = -0.1701644962, \quad \beta_2 = 0.8659987131, \quad \gamma_2 = -0.4702023743, \\ \alpha_3 = 0.1396668314, \quad \beta_3 = -0.9111598860, \quad \gamma_3 = -0.3876607256, \\ p_4 = 0.09718002040, \quad \alpha_1 = 0.4327279791, \quad \beta_1 = 0.8534228602, \quad \gamma_1 = 0.2905441754, \\ \alpha_2 = 0.6165945711, \quad \beta_2 = -0.0166159947, \quad \gamma_2 = 0.7871054843, \\ \alpha_3 = -0.0771601345, \quad \beta_3 = 0.8993633410, \quad \gamma_3 = -0.4303392786, \\ \alpha_4 = 0.6001742588, \quad \beta_4 = 0.4563659694, \quad \gamma_4 = -0.6569025508. \end{aligned}$$

Здесь мультипольные моменты  $p_n$  представлены в безразмерном виде – их размерные величины  $p'_n$  отнесены к массе астероида и к эффективному радиусу  $R_e$ , взятому в соответствующей степени:  $p_n = \frac{p'_n}{mR_e^n}$ .

**Заключение.** В работе воспроизведён восходящий к Максвеллу и Сильвестру подход к определению приближённого выражения для потенциала гравитационного притяжения с помощью мультипольных представлений. В рамках такого подхода для поля притяжения астероида (21) Лютетия определены мультиполи вплоть до четвёртого порядка.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М. : Наука, 1988. 272 с.
2. Буров А. А., Никонов В. И. Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера-Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. 60, № 10. С. 1764–1776.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / пер. с англ. С. В. Фомина. М. : Изд-во иностр. лит., 1952.. 476 с.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 800 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 768 с.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1 : пер. с нем.. М. ; Л. : Гостехиздат, 1933. 525 с.
7. Мецержков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М. : Наука, 1991. 216 с.
8. Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. 450, № 4. P. 3742–3749.
9. Dobrovolskis A. R. Inertia of Any Polyhedron // Icarus. 1996. 124, № 2. P. 698–704.
10. Jorda L., Gaskell R. W., Kaasalainen M. K. J., Carry B. SHAPE MODEL OF ASTEROID 21 LUTETIA, T. L. Farnham (ed.), RO-A-OSINAC/OSIWAC-5-LUTETIA-SHAPE-V1.0 // NASA Planetary Data System. 2013.
11. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. Vol I. Oxford : Clarendon Press, 1873. 502 pp.
12. Sylvester J. J. Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. 2. P. 291–307.
13. Sylvester J. J. The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, v. III. Cambridge : University Press, 1909.
14. Werner R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. 59, № 3. P. 253–278.
15. Werner R. A., Scheeres D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. 65, № 3. P. 313–344.
16. Winch D. E. The fourth order geomagnetic multipole: The sedecimupole // Pure and applied geophysics. 1967. 67. P. 112–122.
17. Winch D. E. The fifth order geomagnetic multipole: The duotrigintupole // Pure and applied geophysics. 1967. 68. P. 90–102.

Буров Александр Анатольевич

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН).

E-mail: jtm@narod.ru

Никонов Василий Иванович

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН).

E-mail: nikon\_v@list.ru





## ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

© 2023 г. Ю. Ф. ВШИВКОВ, В. В. ХОЙЛОВ

**Аннотация.** Работа посвящена решению практически значимой задачи по моделированию элемента гидросистемы и исследованию параметров течения жидкости методами вычислительного эксперимента. В качестве инструмента использовался пакет вычислительной гидродинамики программного продукта COMSOL Multiphysics. На его основе разработана методика математического моделирования элемента гидросистемы и программный комплекс, позволяющий определять коэффициенты местных гидравлических сопротивлений, а также получать качественные и количественные характеристики рассматриваемого процесса.

**Ключевые слова:** вычислительная гидродинамика, COMSOL, моделирование гидросистем.

**AMS Subject Classification:** 35Q30

Течение вязкой жидкости через участок трубопровода согласно работе [1] описывается уравнением Бернулли следующего вида:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_{cp2}^2}{2g} + \sum_{i=1}^n h_i.$$

Данное уравнение отличается от уравнения для элементарной струйки идеальной жидкости последним членом, представляющим собой потерю напора, и коэффициентом  $\alpha$ , который учитывает неравномерность распределения скоростей. Данный коэффициент определяется по формуле:

$$\alpha = \frac{\int v^3 dS}{v_{cp}^3 S}.$$

Определение данного коэффициента на практике является достаточно сложной задачей, в особенности, если речь идет о сложных элементах гидравлических систем, таких как фильтр, гидрораспределитель и т.д. с различными видами местных гидравлических сопротивлений.

Местными гидравлическими сопротивлениями называются различного рода устройства и элементы гидравлической системы из-за которых происходит деформация потока жидкости. Преодоление потоком таких сопротивлений сопровождается: искривлением линий тока, изменением форм и размеров сечения потока, отрывами и т.д. Это в свою очередь сопровождается затратами энергии (напора) потока жидкости. Поэтому при осуществлении расчета необходимо изучить природу и методику расчета местных гидравлических сопротивлений.

В качестве инструмента для решения поставленных задач был выбран программный продукт COMSOL Multiphysics, который позволяет моделировать различные процессы, с помощью методов и программных средств модуля вычислительной гидродинамики. В данном модуле реализованы различные типы течений в частности, используется широкий класс моделей турбулентности [2].

Методика проведения вычислительного эксперимента включает в себя следующие шаги:

1. Инициализация модели (создание модели, выбор физических и/или математических интерфейсов, установка размерности задачи).
2. Задание глобальных и локальных определений (можно использовать числа, параметры, математические функции и операторы, физические константы).
3. Создание или импорт готовой геометрии.

4. Определение интерфейсов (задание условий в расчетной области и на границах).
5. Дискретизация геометрии.
6. Решение созданной модели.
7. Обработка результатов вычислений (вывод необходимых расчетных значений, построение полей давлений, полей скоростей и т.д.).

Выполнена оценка достоверности для различных видов местных сопротивлений, таких как: внезапное сужение русла, внезапное расширение русла, конфузор, диффузор и поворот русла. Для этого производились аналитические расчеты параметров потока (скорость, потери напора, коэффициент местного сопротивления и т.д.), которые сравнивались с расчетными данными полученными в результате моделирования. Полученные результаты показали достаточно высокое совпадение теоретических значений и результатов вычислительного эксперимента, что позволило перейти непосредственно к исследованию элемента гидросистемы и разработке виртуального лабораторного стенда. Окно виртуального стенда и его структура представлены на рисунке 1.

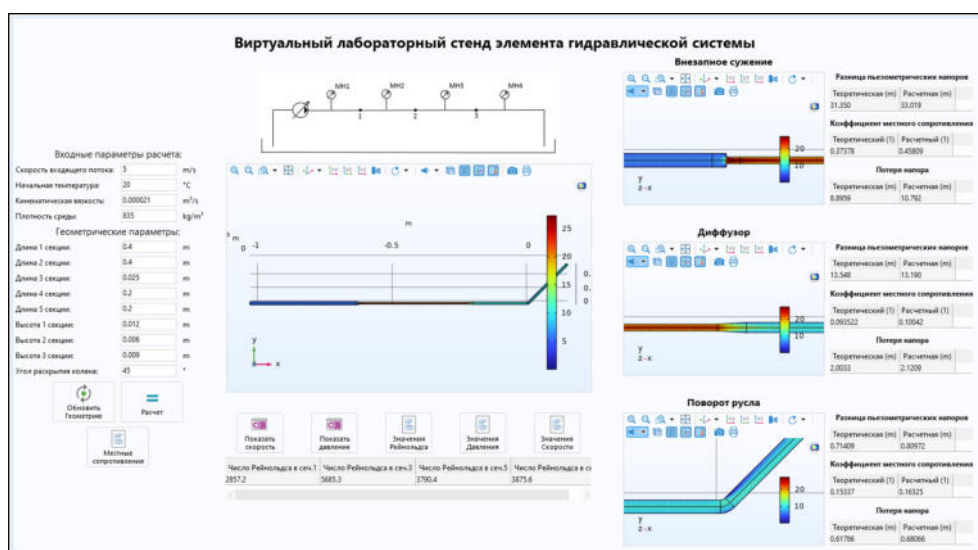


РИС. 1. Окно виртуального лабораторного стенда элемента гидросистемы

**Закключение.** Сложность гидравлических систем часто делает невозможным или дорогостоящим исследование их функционирования и происходящих гидравлических явлений без компьютерного моделирования. Разработанная методика и модель гидросистемы в виде виртуального лабораторного стенда в программном комплексе COMSOL Multiphysics, позволяет исследовать влияние различных местных сопротивлений на параметры потока жидкости, а так же повысить эффективность разработки гидравлических систем на этапе предварительного проектирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрасов Б. Б. Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. М. : Машиностроение, 1967. 368 с.
2. Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы : курс лекций. Ч. 1. Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 1998. 108 с.

Вшивков Юрий Федорович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: 1988ufv@mail.ru

Хойлов Виктор Васильевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: Khoilov2000@gmail.com



## АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ТРЕБУЕМЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИХ НАДЕЖНОСТИ

© 2023 г. С. М. КРИВЕЛЬ, А. Б. СПАСИБКО

Аннотация. Представлена характеристика универсального программного комплекса по исследованию параметров и характеристик надежности объектов на основе структурной схемы надежности. Алгоритмы и программы являются унифицированными, сгруппированы по назначению, предназначены для формирования математических и компьютерных моделей структурных систем надежности любой сложности. Предлагаемый программный комплекс позволяет рассчитать характеристики надежности и провести оценку эффективности мероприятий, направленных на повышение уровня надежности проектируемой системы. Программное обеспечение ориентировано на использование в качестве системы поддержки процесса проектирования систем.

**Ключевые слова:** надежность, SIMULINK, MATLAB, структурные схемы надежности, оптимизация технических систем.

**AMS Subject Classification:** 62P30

Расчет характеристик надежности любой технической системы с использованием структурной схемы надежности основывается на моделировании процессов изменения вероятностей безотказной работы  $P$  или вероятности отказа  $Q$  в зависимости от времени. Все остальные характеристики системы, в конечном итоге являются производными и могут быть выражены через величины  $P(t)$  или  $Q(t)$ . В работах [1, 2] представлены общие принципы построения приложения к Simulink. Все операции и соответствующие им блоки Simulink разделены на три группы: расчет вероятности безотказной работы элементов проектируемой системы на основе заданных характеристик элементов, расчет вероятности безотказной работы групп элементов, образующих типовые соединения и расчет заданных к определению характеристик надежности для системы в целом или отдельных ее отдельных элементов. Оценка показателей надежности отдельных элементов системы и системы в целом выполняется при помощи параметрических методов оценки надежности системы. Все составляющие элементы системы могут быть восстанавливаемыми и невосстанавливаемыми. При этом один и тот же элемент в различных условиях может считаться или восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

С точки зрения проектирования разрабатываемая методика должна способствовать решению в наглядной и объективной форме нескольких задач:

1. Определение наиболее сильно или слабо влияющих на надежность системы элементов или групп элементов.
2. Оценка эффективности резервирования отдельных элементов или групп элементов, с точки зрения повышения надежности системы.
3. На основе полученных определение оптимальных и рациональных путей повышения надежности системы.

**Решение первой задачи.** Определение степени влияния каждого из элементов на надежность системы основано на оценке «чувствительности» вероятности безотказной работы системы в назначенный контрольный момент времени  $t$  от параметров надежности каждого элемента системы. Частная производная вероятности безотказной работы системы по вероятности безотказной работы рассматриваемого элемента является наиболее полной характеристикой оценки

степени влияния и описывается формулой:

$$f'(P_i) = \lim_{\Delta P_i \rightarrow 0} \frac{f(P_1, P_2, \dots, P_i + \Delta P_i, \dots, P_n) - f(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n)}{\Delta P_i}.$$

При необходимости в качестве параметра оценки может использоваться частная производная вероятности безотказной работы системы по величине конкретного параметра закона распределения вероятности безотказной работы элемента. Для этого использоваться частная производная функции нескольких переменных. Однако при использовании данных показателей в качестве параметров оценки следует учитывать, что параметры многих законов распределения вероятности безотказной работы имеют разные единицы измерения. Сравнение величин различных размерностей может быть сложной задачей и требует применения дополнительных методов.

**Решение второй задачи.** Резервирование это один из самых распространенных способов повышения надежности. Преимуществом данной методики является достаточная простота в применении и оценке структурного резервирования в среде предлагаемого приложения Simulink. При таком подходе повышение надежности системы достигается путем использования избыточных элементов, входящих в физическую структуру объекта, что может быть реализовано копированием элемента или группы элементов структурной. Задача решается интерактивным перебором рациональных и возможных вариантов структурного резервирования непосредственно в среде приложения Simulink. Определенную пользу приносит определение «чувствительности» системы на резервирование каждого отдельного элемента системы. Такая проверка может быть выполнена без использования интерактивного режима взаимодействия проектировщика и программного обеспечения.

**Решение третьей задачи.** Улучшение характеристик надежности всегда приводит к удорожанию стоимости всей системы. «Стоимость» может выражаться в единицах веса, цены производства, затратах на ресурсы и многое другое.

Рассмотрим два варианта постановки задачи условной оптимизации:

1. Нахождение наиболее надежного варианта проектирования системы при заданных и ограниченных расходах на стоимость изготовления этой системы.
2. Нахождение таких характеристик элементов системы, чтобы система в целом была заданной надежности, а стоимость изготовления этой системы была минимальной.

Определение оптимальной структуры проектируемой системы осуществляется в постановке задачи целочисленной (дискретной) оптимизации, так как в реальных технических системах не существует непрерывной функциональной зависимости между параметрами характеристик надежности системы и «стоимостью».

Так как любая техническая система имеет строго ограниченное число элементов, из которых она состоит, следовательно, и строго конечное количество возможных вариантов ее реализации. Как правило, в реальных технических системах это число невелико. Рассмотрим пример структурной схемы надежности системы (рисунок 1).

Каждое звено может быть реализовано одним из трех возможных вариантов. Для составления математической модели введем булевы переменные  $\delta_m^l$ , где  $l$  – номер варианта реализации,  $m$  – номер элемента. Данные переменные будут определяться в ходе решения первой и второй задач оптимизации.

Условия ограничений на выбор одного варианта реализации из трех записываются в виде формулы

$$\sum_{m=1}^{12} \sum_{l=1}^3 \delta_m^l = 1.$$

Стоимость элемента в зависимости от принятого решения будет равна

$$C_i = C_i^1 \cdot \delta_i^1 + C_i^2 \cdot \delta_i^2 + C_i^3 \cdot \delta_i^3.$$

Аналогично для вероятности безотказной работы

$$P_i = P_i^1 \cdot \delta_i^1 + P_i^2 \cdot \delta_i^2 + P_i^3 \cdot \delta_i^3.$$

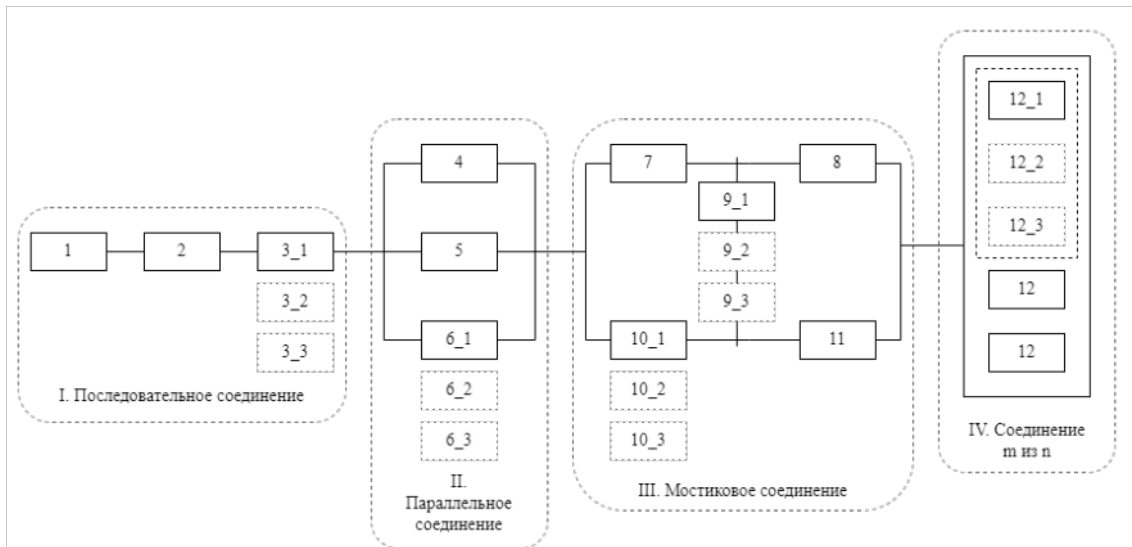


Рис. 1. Структурная схема надежности системы с указанием варьируемых блоков

При этом вероятность безотказной работы как отдельных элементов, так и всей системы в целом определяется в среде Simulink. А стоимость всей системы определяется как сумма стоимостей выбранных вариантов реализации элементов

$$C = (C_1^1 \cdot \delta_1^1) + (C_2^1 \cdot \delta_2^1) + (C_3^1 \cdot \delta_3^1 + C_3^2 \cdot \delta_3^2 + C_3^3 \cdot \delta_3^3) + (C_4^1 \cdot \delta_4^1) + (C_5^1 \cdot \delta_5^1) + (C_6^1 \cdot \delta_6^1 + C_6^2 \cdot \delta_6^2 + C_6^3 \cdot \delta_6^3) + (C_7^1 \cdot \delta_7^1) + (C_8^1 \cdot \delta_8^1) + (C_9^1 \cdot \delta_9^1 + C_9^2 \cdot \delta_9^2 + C_9^3 \cdot \delta_9^3) + (C_{10}^1 \cdot \delta_{10}^1 + C_{10}^2 \cdot \delta_{10}^2 + C_{10}^3 \cdot \delta_{10}^3) + (C_{11}^1 \cdot \delta_{11}^1) + (C_{12}^1 \cdot \delta_{12}^1 + C_{12}^2 \cdot \delta_{12}^2 + C_{12}^3 \cdot \delta_{12}^3).$$

Таким образом, полная постановка задачи оптимизации (в первой постановке), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \min; \\ P &\geq P_{\text{зад}}; \\ P_1 &= P_1^1 \cdot \delta_1^1; \\ C_1 &= C_1^1 \cdot \delta_1^1; \\ \delta_1^1 &= 1; \\ P_2 &= P_2^1 \cdot \delta_2^1; \\ C_2 &= C_2^1 \cdot \delta_2^1; \\ \delta_2^1 &= 1; \\ P_3 &= P_3^1 \cdot \delta_3^1 + P_3^2 \cdot \delta_3^2 + P_3^3 \cdot \delta_3^3; \\ C_3 &= C_3^1 \cdot \delta_3^1 + C_3^2 \cdot \delta_3^2 + C_3^3 \cdot \delta_3^3; \\ \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 &= 1; \\ P_4 &= P_4^1 \cdot \delta_4^1; \\ C_4 &= C_4^1 \cdot \delta_4^1; \\ \delta_4^1 &= 1; \\ P_5 &= P_5^1 \cdot \delta_5^1; \\ C_5 &= C_5^1 \cdot \delta_5^1; \\ \delta_5^1 &= 1; \\ P_6 &= P_6^1 \cdot \delta_6^1 + P_6^2 \cdot \delta_6^2 + P_6^3 \cdot \delta_6^3; \\ C_6 &= C_6^1 \cdot \delta_6^1 + C_6^2 \cdot \delta_6^2 + C_6^3 \cdot \delta_6^3; \\ \delta_6^1 + \delta_6^2 + \delta_6^3 &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_7 &= P_7^1 \cdot \delta_7^1; \\
C_7 &= C_7^1 \cdot \delta_7^1; \\
\delta_7^1 &= 1; \\
P_8 &= P_8^1 \cdot \delta_8^1; \\
C_8 &= C_8^1 \cdot \delta_8^1; \\
\delta_8^1 &= 1; \\
P_9 &= P_9^1 \cdot \delta_9^1 + P_9^2 \cdot \delta_9^2 + P_9^3 \cdot \delta_9^3; \\
C_9 &= C_9^1 \cdot \delta_9^1 + C_9^2 \cdot \delta_9^2 + C_9^3 \cdot \delta_9^3; \\
\delta_9^1 + \delta_9^2 + \delta_9^3 &= 1; \\
P_{10} &= P_{10}^1 \cdot \delta_{10}^1 + P_{10}^2 \cdot \delta_{10}^2 + P_{10}^3 \cdot \delta_{10}^3; \\
C_{10} &= C_{10}^1 \cdot \delta_{10}^1 + C_{10}^2 \cdot \delta_{10}^2 + C_{10}^3 \cdot \delta_{10}^3; \\
\delta_{10}^1 + \delta_{10}^2 + \delta_{10}^3 &= 1; \\
P_{11} &= P_{11}^1 \cdot \delta_{11}^1; \\
C_{11} &= C_{11}^1 \cdot \delta_{11}^1; \\
\delta_{11}^1 &= 1; \\
P_{12} &= P_{12}^1 \cdot \delta_{12}^1 + P_{12}^2 \cdot \delta_{12}^2 + P_{12}^3 \cdot \delta_{12}^3; \\
C_{12} &= C_{12}^1 \cdot \delta_{12}^1 + C_{12}^2 \cdot \delta_{12}^2 + C_{12}^3 \cdot \delta_{12}^3; \\
\delta_{12}^1 + \delta_{12}^2 + \delta_{12}^3 &= 1.
\end{aligned}$$

Полученная система представляют собой задачу нелинейного программирования. Для решения такой задачи достаточно рассмотреть метод полного перебора значений булевых переменных. Результатом решения рассматриваемых задач будет набор номеров варианта реализации каждого элемента системы, который будет являться оптимальным для каждой из двух представленных задач.

**Заключение.** При современном уровне технического прогресса требования к показателям надежности очень высоки при создании новых систем. Поэтому на этапе проектирования обязательно нужно использовать какие-либо методы оптимального проектирования. Разработанная методика и программный комплекс позволяет значительно повысить эффективность разработки технических систем с учетом характеристик надежности на этапе проектирования с использованием метода структурных схем. А информация о возможных оптимальных решениях повышения надежности системы также позволит выявить некоторые наиболее перспективные направления совершенствования системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривель С. М., Лебедева А. А., Спасибко А. Б. Методика и программное обеспечение моделирования функционирования систем с учетом характеристик их надежности на этапах эксплуатации и проектирования // *Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык*. 2023. С. 57–76.
2. Кривель С. М. Анализ структурной схемы построения технических систем с использованием Simulink // *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2018. 22, № 6. С. 85–97.

Кривель Сергей Михайлович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: krivel@mail.ru

Спасибко Александра Борисовна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: aleksbor@gmail.com



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

© 2023 г. Д. С. ЛУКЪЯНЦЕВ, Н. Т. АФАНАСЬЕВ, А. Б. ТАНАЕВ, С. О. ЧУДАЕВ

**Аннотация.** Разработан численный алгоритм расчета траекторных характеристик и лучевой расходимости электромагнитных волн при распространении в гравитационном поле группы астрофизических объектов. В основу алгоритма положена расширенная система лучевых дифференциальных уравнений в форме Эйлера. В качестве показателя преломления среды использован показатель преломления вакуума с учетом гравитационного потенциала объектов. Для простой модели показателя преломления получено аналитическое решение расширенной системы лучевых уравнений. Проведены расчеты рефракционных характеристик электромагнитных волн с помощью алгоритма и по аналитическим формулам. Сравнение полученных результатов показало высокую точность численного алгоритма.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, аналитические решения, дифференциальные уравнения, электромагнитное излучение, гравитационный потенциал.

**AMS Subject Classification:** 85-04

**1. Введение.** В настоящее время благодаря созданию прецизионных астрофизических инструментов нового поколения решение вопросов распространения электромагнитных волн в гравитационном поле различных космических объектов становится практически возможным [5, 6]. При теоретическом рассмотрении данной задачи полезным является постановка численных экспериментов. Для описания характеристик распространения электромагнитных волн реальный процесс заменяют его приближенной математической моделью [1, 4]. Необходимость такой замены вызвана тем, что реальные процессы являются сложными и описание их в полном объеме представляет большую проблему [3]. Полученные функциональные соотношения удается реализовать только с использованием численной схемы расчетов. Для тестирования численной схемы интерес представляет аналитическое решение задачи рефракции электромагнитных волн в окрестности одиночного объекта с простым гравитационным потенциалом.

Целью данной работы является создание и тестирование численного алгоритма расчета рефракционных характеристик электромагнитных волн в гравитационном поле группы астрофизических объектов.

**2. Математический аппарат.** В основу численного алгоритма расчета рефракционных характеристик электромагнитных волн, распространяющихся в гравитационном поле, была положена расширенная система обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Эйлера [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\varphi} &= R \cot \beta; & \frac{d\beta}{d\varphi} &= \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cot \beta - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1; & \frac{dR'}{d\varphi} &= R' \cot \beta - \frac{R\beta'}{\sin^2 \beta}; \\ \frac{d\beta'}{d\varphi} &= \frac{1}{n} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi \partial R} R' \cot \beta - \frac{\beta'}{\sin^2 \beta} \frac{\partial n}{\partial \varphi} - R' \frac{\partial n}{\partial R} - RR' \frac{\partial^2 n}{\partial R^2} \right) - \frac{R'}{n^2} \frac{\partial n}{\partial R} \left( \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cot \beta - R \frac{\partial n}{\partial R} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R, \varphi$  — радиальная и угловая координаты луча,  $\beta$  — угол рефракции луча,  $n$  — эффективный показатель преломления вакуума в присутствии гравитационного поля;  $R' = \partial R / \partial \beta_n$ ;  $\beta' = \partial \beta / \partial \beta_n$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проекты FZZE-2020-0024, FZZE-2023-0004), с использованием УНУ «Астрофизический комплекс МГУ-ИГУ» (договор ЕВ-075-15-2021-675).

Тестирование численного алгоритма расчета проводилось с помощью аналитического решения системы (1), полученного для простой модели показателя преломления вакуума в присутствии гравитационного поля:

$$n = 1 + \frac{R_g}{R}, \quad (2)$$

где  $R_g = 2GM/c^2$  — гравитационный радиус астрофизического объекта,  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса объекта,  $c$  — скорость света. С учетом закона Снеллиуса для слоистой среды (2):

$$nR \sin \beta = n_n R_n \sin \beta_n, \quad (3)$$

(здесь  $R_n$  — радиальное положение источника излучения электромагнитных волн,  $\beta_n$  — угловой прицельный параметр,  $n_n$  — значение показателя преломления в окрестности источника волн), первое уравнение системы (1) было преобразовано к виду:

$$\frac{dR}{d\varphi} = R \frac{\sqrt{(R + R_g)^2 - (R_n + R_g)^2 \sin^2 \beta_n}}{(R_n + R_g) \sin \beta_n}. \quad (4)$$

Интегрирование (4) дает функциональную зависимость  $R(\varphi)$ :

$$R(\varphi) = \frac{A^2}{(R_g - QS(\varphi))}, \quad (5)$$

где  $A = Q^2 - R_g^2$ ;  $Q = (R_n + R_g) \sin \beta_n$ ;  $S(\varphi) = \sin(A\varphi/Q + B)$ ;  $B = \arcsin((R_g R_n - A^2)/R_n Q)$ .

Решение для функции  $\beta(\varphi)$  было найдено из первого уравнения системы (1). С учетом (5), дифференцирование  $R(\varphi)$  по переменной  $\varphi$  дает:

$$\beta(\varphi) = \operatorname{arccot}\left(\frac{AC(\varphi)}{(R_g - QS(\varphi))}\right), \quad (6)$$

где  $C(\varphi) = \cos(A\varphi/Q + B)$ .

Аналитические решения для  $R'(\varphi)$  и  $\beta'(\varphi)$  были получены из выражений (5) и (6) путем их дифференцирования по прицельному параметру  $\beta_n$ :

$$R'(\varphi) = \frac{\cot \beta_n}{(R_g - QS(\varphi))^2} (2Q^2(R_g - QS(\varphi)) + A(AQS(\varphi) + C(\varphi)(R_g^2\varphi - M))); \quad (7)$$

$$\beta'(\varphi) = -\frac{\cot \beta_n}{AQ(R_g - QS(\varphi))} (Q^2 R_g C(\varphi) + A(R_g^2\varphi - M)), \quad (8)$$

где  $M = (Q^2 + R_g R_n + R_g^2) \tan \beta_n$ .

**3. Тестирование алгоритма.** Для тестирования разработанного алгоритма были заданы следующие начальные условия:  $R(\varphi = 0) = R_n = 50 \text{cul}$  (где  $\text{cul}$  — условная единица длины),  $\beta(\varphi = 0) = \beta_n$ ,  $R'(\varphi = 0) = 0$ ,  $\beta'(\varphi = 0) = 1$ , угол  $\beta_n$  находился в диапазоне  $[-0.314; -0.086] \text{rad}$ . Гравитационный радиус  $R_g = 1 \text{cul}$ . Расчет проводился до расстояния  $R_k = 50 \text{cul}$ . Результаты представлены на рис.1.

Сравнение полученных зависимостей для рефракционных характеристик электромагнитных волн в гравитационном поле показало, что кривые, рассчитанные с помощью численного алгоритма и по аналитическим формулам, совпадают с высокой точностью. Поэтому используемую численную схему интегрирования расширенной системы лучевых дифференциальных уравнений целесообразно использовать в расчетах рефракции электромагнитных волн в космической среде с более сложным гравитационным потенциалом.



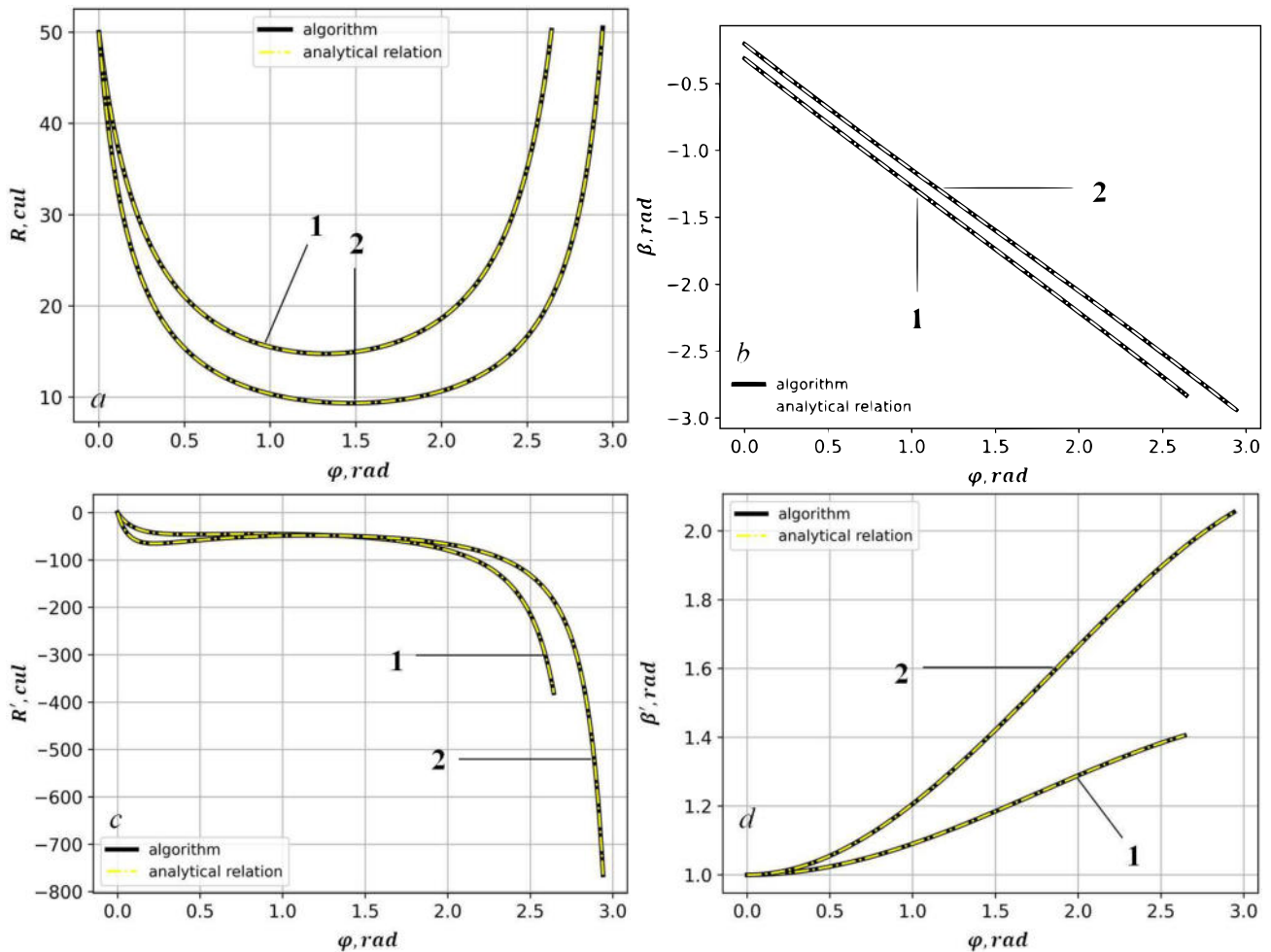


Рис. 1. Результаты численного (сплошная линия) и аналитического (штрих-пунктирная линия) моделирования для рефракционных характеристик электромагнитных волн: а —  $R(\varphi)$ ; б —  $\beta(\varphi)$ ; в —  $R'(\varphi)$ ; д —  $\beta'(\varphi)$  при различных значениях прицельного параметра  $\beta_n$ :  $-0.314\text{rad}$  (1) и  $-0.2\text{rad}$ (2).

**4. Заключение.** Разработан алгоритм расчета рефракционных характеристик электромагнитных волн, распространяющихся в гравитационном поле группы астрофизических объектов. В основу алгоритма положена расширенная система лучевых дифференциальных уравнений в форме Эйлера. С помощью простой модели эффективного показателя преломления вакуума получено аналитическое решение для расширенной системы уравнений. Проведено моделирование рефракции электромагнитных волн в гравитационном поле при различных начальных условиях. Сравнение результатов численных и аналитических расчетов показало, что численный алгоритм работает с высокой точностью. Разработанный алгоритм расчета рефракционных характеристик электромагнитных волн можно использовать для интерпретации данных наблюдений в астрофизических экспериментах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М. : Наука, 1971.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М. : Наука, 1980. 304 с.
3. Лукьянцев Д. С., Зотова И. А., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б. Гравитационное микролинзирование света в динамической системе экзопланета – звезда // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023) : материалы 5-й Междунар. конф. Иркутск, 18–23 сент. 2023 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2023.

4. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М. : Наука, 1961. 563 с.
5. Acciari V. A. [and et al.]. Multiwavelength study of the gravitational lensed blazar QSO B0218+357 between 2016 and 2020 // MNRAS 2020. 510. P. 2344–2362.
6. Barnacka A. [and et al.]. Strongly lensed jets, time delay, and the value of  $H_0$  // The Astrophysical Journal 2015. 799, № 1.

Лукьянцев Дмитрий Сергеевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: smeofs1997@mail.ru

Афанасьев Николай Тихонович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: spacemaklay@gmail.com

Танаев Андрей Борисович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: tanaev.ab@yandex.ru

Чудаев Станислав Олегович  
Институт солнечно-земной физики СО РАН (ИСЗФ СО РАН)  
E-mail: ch45st@gmail.com



## ГРАВИТАЦИОННОЕ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЕ СВЕТА В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЭКЗОПЛАНЕТА–ЗВЕЗДА

© 2023 г. Д. С. ЛУКЪЯНЦЕВ, И. А. ЗОТОВА, Н. Т. АФАНАСЬЕВ, А. Б. ТАНАЕВ

**Аннотация.** Приведены результаты математического моделирования распространения излучения внешнего оптического источника в возмущенном гравитационном поле звезды. Возмущающим фактором является близко расположенная экзопланета, относящаяся к классу супер-Юпитеров. На основе расширенной системы лучевых дифференциальных уравнений в форме Эйлера выполнен расчет траекторных характеристик и пространственной расходимости светового поля. С помощью численных экспериментов выявлены условия для обнаружения экзопланеты по данным измерений потока света в картинной плоскости наблюдателя. Построена зависимость фактора фокусировки света от начального угла излучения для различных положений экзопланеты и звезды относительно оптического источника. Отмечено, что регистрация экзопланеты возможна в различных диапазонах начальных углов излучения. Возрастание фактора фокусировки света в условиях микролинзирования позволяет установить наличие возмущения гравитационного поля звезды, что указывает на присутствие у звезды экзопланеты.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, дифференциальные уравнения, электромагнитные волны, гравитационное поле, микролинзирование, звезда, экзопланета.

**AMS Subject Classification:** 85-10

**1. Введение.** Хорошо известно [1–4], что астрофизические объекты или их группы могут проявлять свойства гравитационных линз, приводящих к изменению направления распространения света и образованию явлений многолучевости и фокусировки. Такие линзы являются естественными астрофизическими телескопами, с помощью которых можно изучать не только параметры источников оптического излучения, но и самих гравитирующих объектов [5,6]. В частности, применение метода микролинзирования позволило обнаружить планетарные системы у звезд ранних классов [1,5]. Для выявления экзопланеты в окрестности звезды обычно используют асимптотические решения [1] и проводят построение хода лучей в системе из двух линз. Однако при рассмотрении тонких эффектов взаимодействия гравитационных полей звезды и экзопланеты точность асимптотического решения недостаточна. В настоящей работе для обнаружения экзопланеты вблизи звезды используется подход, основанный на построении лучевого поля оптического источника в вакууме с показателем преломления, учитывающем влияние эффектов гравитации. Для расчета лучевого потока и траекторных характеристик света используется разработанный нами алгоритм решения лучевых дифференциальных уравнений в форме Эйлера [3].

Целью работы является применение разработанного алгоритма расчета для выявления экзопланеты вблизи звезды по данным гравитационного микролинзирования.

**2. Математический аппарат и полученные результаты.** Предположим, что на пути распространения света от далекого внешнего источника встречается звезда с экзопланетой, вращающейся по круговой орбите (см. рис. 1). Для расчета влияния гравитационного поля системы экзопланета-звезда на траекторные и энергетические характеристики света удаленного источника применим разработанный нами алгоритм [3], использующий представления метода геометрической оптики [7]. Информативным показателем пространственной структуры света в картинной

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проекты FZZE-2020-0024, FZZE-2023-0004), с использованием УНУ «Астрофизический комплекс МГУ-ИГУ» (договор ЕВ-075-15-2021-675).

плоскости наблюдателя является фактор фокусировки, характеризующий лучевую расходимость светового потока:

$$I = \log \left| \frac{\sin \beta_n R_0(\varphi_0) \varphi_0}{\sin \varphi \sin \beta(\varphi) R(\varphi) R'(\varphi)} \right|, \quad (1)$$

где  $\beta(\varphi)$ ,  $R(\varphi)$ ,  $\varphi$  — соответственно угол рефракции, радиальная и угловая координаты луча света при распространении в гравитационном поле системы экзопланета-звезда;  $R_0$ ,  $\varphi_0$  — радиальная и угловая координаты луча при распространении в гравитационном поле звезды при отсутствии экзопланеты;  $\beta_n$  — начальный угол излучения;  $R' = \partial R / \partial \beta_n$ .

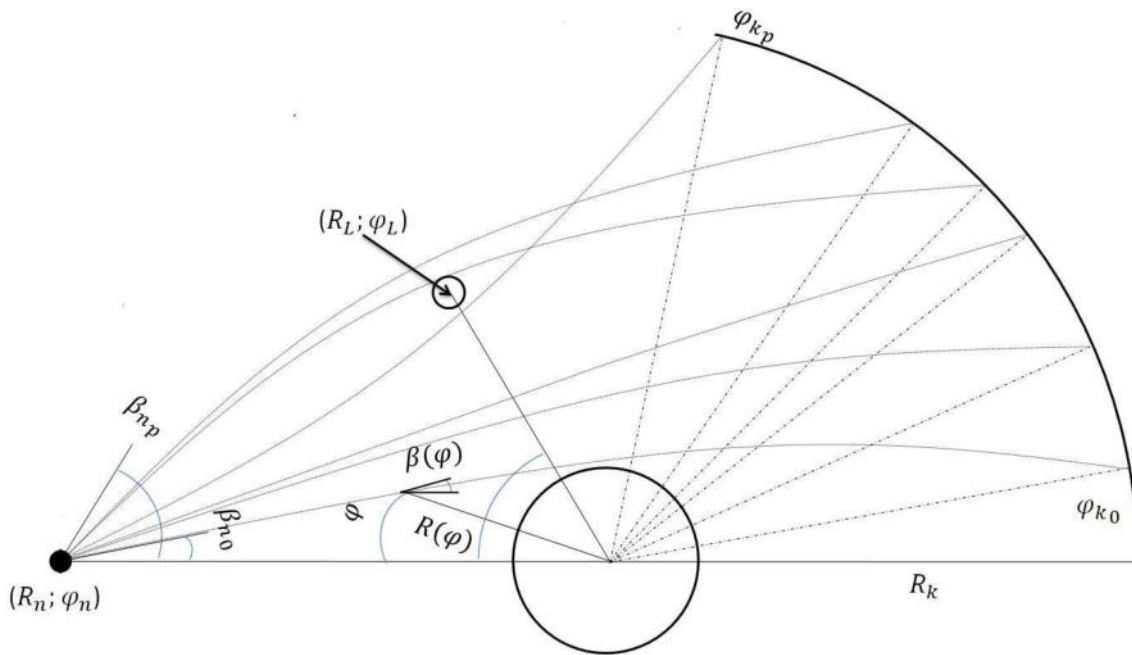


Рис. 1. Геометрия задачи.  $R_n, \varphi_n$  — координаты внешнего источника света относительно центра звезды;  $R_L, \varphi_L$  — координаты центра экзопланеты;  $R_k$  — расстояние до картинной плоскости наблюдателя;  $[\beta_{n_0}; \beta_{n_p}]$  — сектор начальных углов излучения;  $[\varphi_{k_0}; \varphi_{k_p}]$  — угловые координаты точек прихода лучей на картинную плоскость.

Полагая, что объекты гравитационной системы экзопланета-звезда аддитивно вносят свой вклад в искривление пространства, для эффективного показателя преломления вакуума будем использовать модель:

$$n = 1 + \frac{R_g}{R} + A \exp[-b_\varphi(\varphi - \varphi_L)^2 - b_R(R - R_L)^2], \quad (2)$$

где  $R_g$  — гравитационный радиус звезды;  $A$  — амплитуда возмущения, вызванного гравитационным полем экзопланеты;  $\varphi_L, R_L, b_\varphi, b_R$  — соответственно координаты центра локализации и масштабы возмущения.

Для расчетов рефракционных характеристик света задавались следующие начальные условия:  $R(\varphi_n) = R_n = 50 \text{cul}$  (где  $\text{cul}$  — условная единица длины),  $\beta(\varphi_n) = \beta_n$ . Значения угла  $\beta_n$  варьировались в диапазоне  $[-0.157; -0.086] \text{rad}$ . В качестве возмущающего фактора рассматривалась экзопланета, относящаяся к классу супер-Юпитеров. Параметры модели (2) были взяты:  $R_g = 1 \text{cul}$ ,  $A = 0.5$ ,  $b_\varphi = 4 \cdot 10^6$ ,  $b_R = 4 \cdot 10^4 \text{cul}^{-2}$ ,  $R_L = 5 \text{cul}$ , а значения  $\varphi_L$  менялись в диапазоне

$[0.5; 3.0]rad$ . Расчет проводился до расстояния  $R_k = 50cul$ . Рассчитанные зависимости фактора фокусировки от начального угла излучения света  $\beta_n$  для различных положений экзопланеты относительно источника представлены на рис.2.

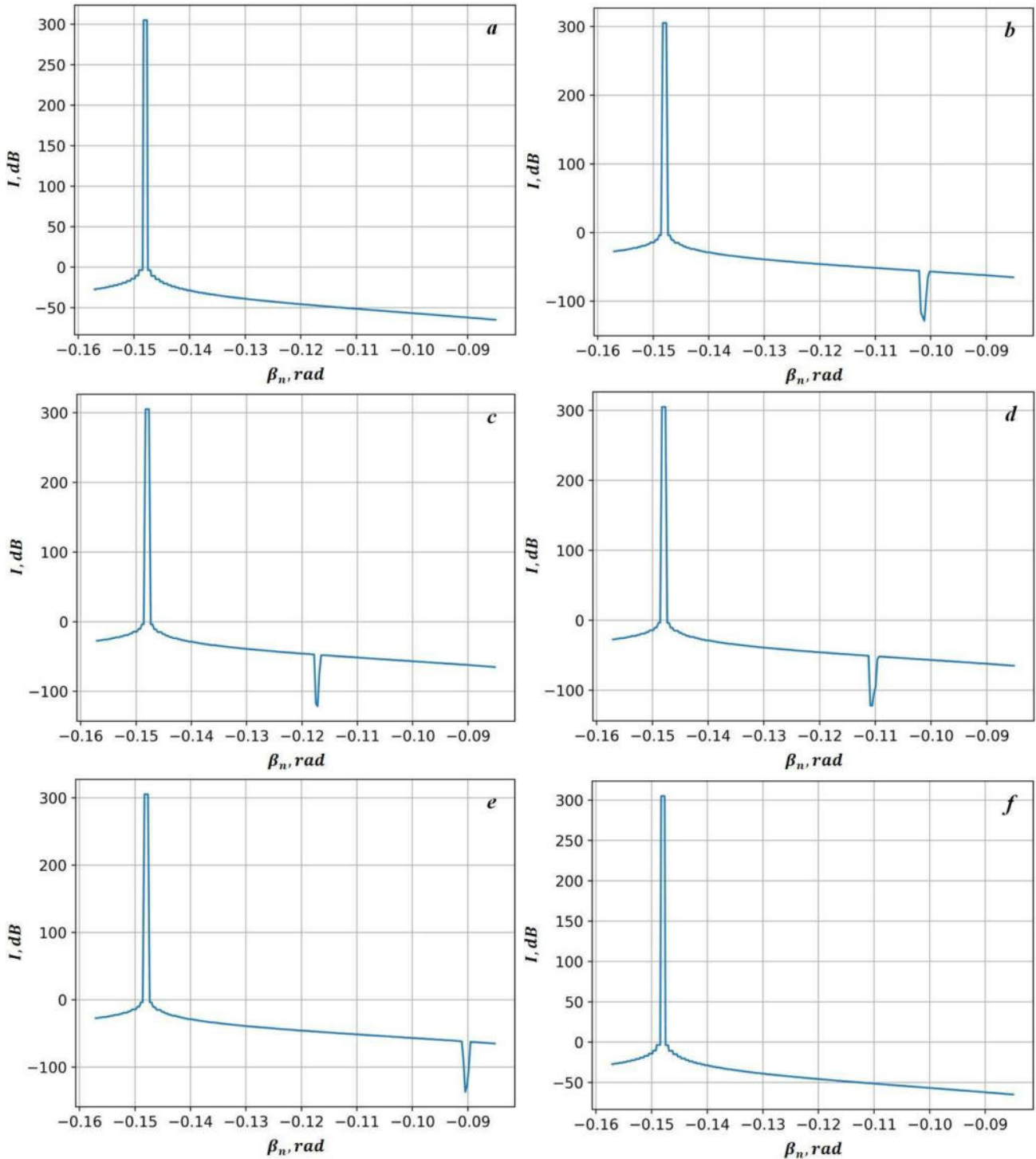


Рис. 2. Зависимость фактора фокусировки светового потока от начального угла излучения  $\beta_n$  для различных значений центра локализации гравитационного возмущения  $\varphi_L$ : *a* –  $0.5rad$ ; *b* –  $1.0rad$ ; *c* –  $1.5rad$ ; *d* –  $2.0rad$ ; *e* –  $2.5rad$ ; *f* –  $3.0rad$

Нетрудно заметить, что существуют начальные углы излучения, когда возникает существенный рост фактора фокусировки, связанный с гравитационным микролинзированием света. В

этом случае  $R'(\varphi) \rightarrow 0$ . В некоторых интервалах углов излучения видна дефокусировка света. Вращение экзопланеты вокруг звезды приводит к смещению углового интервала дефокусировки света. Это связано с тем, что при распространении света между звездой и планетой большее влияние на траекторию луча оказывает гравитационное поле звезды.

Таким образом, разработанный алгоритм расчета рефракционных характеристик света может быть использован для выявления экзопланеты вблизи звезды по данным гравитационного микролинзирования

**3. Заключение.** С помощью разработанного алгоритма проведено компьютерное моделирование распространения света в гравитационном поле динамической системы экзопланета-звезда. Для различных положений экзопланеты относительно внешнего источника построена зависимость фактора фокусировки светового потока от начального угла излучения. Выявлены области немонотонности в поведении фактора фокусировки в картинной плоскости наблюдателя в определенных диапазонах углов излучения, что связано с эффектом гравитационного микролинзирования. Возрастание фактора фокусировки света говорит в пользу существования в окрестности звезды гравитационного возмущения, что может быть связано с наличием у звезды планетарной системы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров А. Ф.* Гравитационные линзы и микролинзы. М. : Янус-К, 1997. 328 с.
2. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд. М. : Наука, 1971.
3. *Лукьянцев Д. С., Афанасьев Н. Т., Танаев А. Б., Чудаев С. О.* Математическое моделирование рефракции электромагнитных волн в гравитационном поле // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023) : материалы 5-й Междунар. конф. Иркутск, 18–23 сент. 2023 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2023.
4. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М. : Наука, 1961. 563 с.
5. *Barnacka A. [and et al.].* Strongly lensed jets, time delay, and the value of  $H_0$ . // The Astrophysical Journal 2015. 799. 9 pp.
6. *Bennett D. P. [and et al.].* Conformation of the planetary microlensing signal and star and planet mass determination for event OGLE-2005-BLG-169 // The Astrophysical Journal 2015. 808, № 2. 9 pp.
7. *Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I.* Geometrical Optics of Inhomogeneous Medium. Berlin : Springer-Verlag, 1990. 312 с.

Лукьянцев Дмитрий Сергеевич  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: smeofs1997@mail.ru

Зотова Илона Александровна  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: ilona02082002@gmail.com

Афанасьев Николай Тихонович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: spacemaklay@gmail.com

Танаев Андрей Борисович  
Иркутский государственный университет (ИГУ)  
E-mail: tanaev.ab@yandex.ru



## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

© 2023 г. И. В. СИДЛЕР

**Аннотация.** Математическая модель гидравлического удара представляет собой систему дифференциальных уравнений гиперболического типа, для которой поставлена начально-краевая задача определенного вида. В работе рассматриваются подходы к численному решению задачи. Применяются метод характеристик и неявная схема бегущего счета, наиболее точно учитывающие специфику краевых условий в задаче гидравлического удара.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения гиперболического типа, начально-краевая задача, численный метод, гидравлический удар, трубопровод.

**AMS Subject Classification:** 35L53, 35L72

**Введение.** Рассматривается математическая модель переходного процесса, вызванного резким изменением давления в простом трубопроводе, — модель гидравлического удара. Изучению вопросов, связанных с решением задач гидравлического удара, посвящено значительное количество работ [1, 4, 8, 10, 11]. В [8] дан подробный обзор методов расчета переходных процессов в напорных трубопроводных системах. Традиционно задачи гидравлического удара решают численно с применением различных модификаций метода характеристик [1, 4, 8, 10], при этом отмечается [1, 8], что среди приближенных методов наиболее перспективными представляются явно-неявные схемы.

Цель работы — сравнить эффективность метода характеристик и схемы бегущего счета применительно к задаче гидроудара. Модель гидравлического удара представляет собой начально-краевую задачу, поставленную для системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Для численного решения задачи применяются модификация метода характеристик и неявная схема бегущего счета, точно учитывающие условия на границах, при этом сохраняется порядок базовых схем. Рассматриваемый метод характеристик является условно устойчивым, в то время как схема бегущего счета устойчива безусловно [2, 5]. Точное решение задачи гидравлического удара в упрощенном виде использовано в качестве контрольного варианта для сравнения результатов расчетов.

**1. Постановка задачи.** Модель гидравлического удара включает уравнение движения

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_0 \frac{\partial x}{\partial t} + \alpha_1 |x| x = 0 \quad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial x}{\partial l} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

---

Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0006, рег. № АААА-А21-121012090034-3 и № FWEU-2021-0002, рег. № АААА-А21-121012090012-1) программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг. с использованием ресурсов ЦКП «Высокотемпературный контур» (Минобрнауки России, проект № 13.ЦКП.21.0038).

где  $p(l, t)$  – давление,  $x(l, t)$  – массовый расход, а коэффициенты

$$\alpha_0 = \frac{4}{\pi D^2}, \quad \alpha_1 = \frac{8\lambda}{\pi^2 D^5 \rho}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi D^2}{4a^2} \quad (3)$$

есть величины постоянные. Здесь  $D$  – внутренний диаметр трубопровода;  $\lambda$  – коэффициент сопротивления трению;  $\rho$  – плотность транспортируемой среды;  $a$  – скорость распространения волн давления. Независимыми переменными являются время  $t$  и координата длины трубы  $l$ .

Дискриминант системы (1), (2) положителен, поэтому имеем дело с уравнением гиперболического типа.

Заданы начальные условия. Первое из них учитывает потери давления на трение:

$$p(l, t_0) = p_0 - \alpha_1 x_0^2 l, \quad 0 \leq l \leq L, \quad (4)$$

второе задает постоянную величину расхода в момент  $t_0$ :

$$x(l, t_0) = x_0, \quad 0 \leq l \leq L. \quad (5)$$

Заданы условия на границах. На левом конце трубопровода действует внешний источник постоянного давления:

$$p(l, t) |_{l=0} = p_0, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

На правом конце трубопровода в момент  $t_0$  начинает закрываться задвижка, например, по линейному закону, при этом поток жидкости полностью перекрывается за время  $T_1$ :

$$x(l, t) |_{l=L} = \begin{cases} x_0(1 - \frac{t}{T_1}), & t_0 \leq t < T_1; \\ 0, & T_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (7)$$

В результате закрытия задвижки на правом конце трубопровода давление меняется и возникает переходный процесс, называемый гидравлическим ударом. При резком закрытии задвижки давление, созданное волной сжатия, может оказаться достаточно большим, чтобы разорвать трубу. Требуется найти  $p(l, t)$  и  $x(l, t)$  в области изменения независимых переменных  $G = [0, L] \times [t_0, T]$ , где  $L$  – длина трубы. Таким образом, имеем смешанную задачу (1)–(7).

Отметим, что существует общее решение системы (1), (2) (см. [9], стр. 43). В работе [12] предложено точное решение системы при наличии в ней неоднородного уравнения движения жидкости.

В монографии [7] освещены вопросы существования решения задачи Коши (стр. 91), смешанной задачи для систем нелинейных уравнений гиперболического типа (стр. 94). Следуя [7] (стр. 99–101), делаем вывод, что граничные условия (6), (7) некорректны. Обратимся к численному решению задачи (1)–(7).

## 2. О численном решении уравнений гидравлического удара.

*2.1. Метод характеристик.* Одним из наиболее распространенных методов интегрирования систем гиперболических уравнений является метод характеристик [1, 3, 7, 10]. Его особенность – минимальное использование операторов интерполирования и связанная с этим максимальная близость области зависимости разностной схемы и области зависимости системы дифференциальных уравнений. Решение строится на сетке, которая учитывает характеристические направления системы. На рис. 1 изображен трехточечный шаблон этой сетки (1 Ā 2). Недостатком метода является то, что шаги сетки жестко привязаны к характеристическим направлениям, что не всегда удовлетворяет практическим задачам. А также отметим, что метод характеристик условно устойчив – шаги сетки должны удовлетворять условию Куранта

$$a\tau \leq h, \quad (8)$$

где  $a = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}$ ,  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по оси трубопровода.



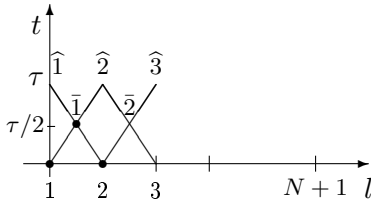


Рис. 1. Сетка метода характеристик

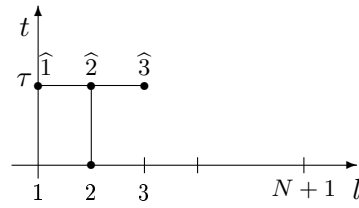


Рис. 2. Шаблон сетки неявного метода бегущего счета (9)

2.2. *Неявная схема бегущего счета для решения задачи (1)–(7).* Для задач гиперболического типа часто применяют разностные методы, благодаря их универсальности и хорошо разработанной теории [2, 5–7]. Вводят сетку в области изменения переменных, производные, входящие в уравнения и краевые условия, заменяют разностями значений функций в узлах сетки. Получающиеся при этом алгебраические уравнения представляют собой разностную схему.

Построим в области  $G = [0, L] \times [t_0, T]$  равномерную прямоугольную сетку с шагами  $h$  и  $\tau$ :  $h = \frac{L}{N}$ ,  $l_n = (n-1)h$ ,  $n = \overline{1, N+1}$  и  $\tau = \frac{T-t_0}{M}$ ,  $t_m = (m-1)\tau$ ,  $m = \overline{1, M}$ . Обозначим  $p_n^m = p^h(l_n, t_m)$ ,  $x_n^m = x^h(l_n, t_m)$  – приближенные значения функций  $p(l, t)$ ,  $x(l, t)$  в узлах сетки. Далее для простоты изложения обозначим  $p_n = p_n^m$ ,  $\hat{p}_n = p_n^{m+1}$ ,  $x_n = x_n^m$ ,  $\hat{x}_n = x_n^{m+1}$ . Выберем шаблон, изображенный на рис. 2. С использованием односторонних производных получим неявную расчетную схему для первого слоя прямоугольной сетки

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(\hat{p}_n - \hat{p}_{n-1}) + \frac{\alpha_0}{\tau}(\hat{x}_n - x_n) + \alpha_1 |x_n| \hat{x}_n = 0, \\ \frac{1}{h}(\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n) + \frac{\alpha_2}{\tau}(\hat{p}_n - p_n) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \end{cases} \quad (9)$$

при этом необходимо учесть краевые условия:  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{x}_{N+1}$  известны из (6), (7). Схема (9) представляет собой трехдиагональную СЛАУ, которая решается методом прогонки. Следует отметить, что схема (9) безусловно устойчива и имеет первый порядок точности по времени и второй порядок по пространственной переменной  $l$ . Для всех временных слоев схема (9) выписывается без изменений.

**3. Тестирование на задаче с аналитическим решением.** Система упрощенных уравнений гидроудара

$$\frac{\partial p}{\partial l} + \alpha_0 \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial l} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

$$0 \leq l \leq L, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с начальными условиями

$$p(l, 0) = p_0 - \alpha_1 x_0^2 l, \quad x(l, 0) = x_0, \quad 0 \leq l \leq L, \quad (12)$$

в области определенности отрезка  $[0, T]$  имеет решение

$$p(l, t) = p_0 - \alpha_1 x_0^2 l, \quad x(l, t) = x_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x_0^2 t,$$

которое выписано согласно формулам, полученным в [13].

Заданы параметры трубопровода  $D = 0,4$  (м),  $L = 400$  (м),  $a = 1000$  (м/с),  $\rho = 1000$  (кг/м<sup>3</sup>), коэффициент шероховатости  $k = 0,5$  (мм),  $\lambda = 0,11 \sqrt[4]{\frac{k}{D}}$ , начальные величины расхода  $x_0 = 500$  (кг/с) и давления  $p_0 = 980665$  (Па).

Реализация схемы (9) включает решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Для расчетов зададим шаги сетки, удовлетворяющие условию Куранта (8). В таблице 1 приведены значения погрешностей для расхода  $x(l, t)$ , вычисленных методом характеристик [1, 10, 13]

и по схеме (9). Результаты подтверждают, что метод характеристик имеет первый порядок точности, в то время как неявная схема бегущего счета имеет аппроксимацию  $O(h^2 + \tau)$ . Применение неявной схемы бегущего счета предпочтительнее.

ТАБЛИЦА 1. Погрешность численного решения системы (10)–(12)

$\tau$	$h$	метод	
		характеристик	бегущего счета
0,0025	2,5	$1,25 \cdot 10^0$	$3,64 \cdot 10^{-12}$
0,005	5	$2,50 \cdot 10^0$	$2,33 \cdot 10^{-12}$
0,01	10	$5,00 \cdot 10^0$	$2,10 \cdot 10^{-12}$
0,02	20	$1,00 \cdot 10^1$	$4,55 \cdot 10^{-13}$
0,04	40	$2,00 \cdot 10^1$	$2,84 \cdot 10^{-13}$
0,08	80	$4,00 \cdot 10^1$	$1,71 \cdot 10^{-13}$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атавин А. А., Букреев В. И., Васильев О. Ф., Дегтярев В. В., Тарасевич В. В., Федорова Н. Н., Юдин В. А., Яненко А. П. Об определении параметров гидродинамических процессов в отдельных конструкциях и сооружениях. Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2020. 415 с.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах : учеб. пособие. М. : Высшая школа, 2008. 480 с.
4. Новицкий Н. Н., Сеннова Е. В., Сухарев М. Г. и др. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. Новосибирск : Наука, 2000. 273 с.
5. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1986. 288 с.
6. Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф., Волосова Н. К. Оптимальный параметр аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. 2018. 4. С. 167-186, <https://elib.psu.by/handle/123456789/22241>.
7. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М. : Наука, 1978. 688 с.
8. Тарасевич В. В. Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах : дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 2017. 230 с.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : МГУ, 1999. 799 с.
10. Фокс Д. А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. М. : Энергоиздат, 1981. 248 с.
11. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М. : Недра, 1975. 296 с.
12. Grazhdantseva E. Y., Solodusha S. V. On a hyperbolic system of equations in the problem of unsteady fluid motion // Journal of Physics: Conference Series 2021. 1847. P. 012005.
13. Sidler I., Novitsky N., Grazhdantseva E. Alternative methods for solving a hyperbolic system of equations in a simplified water hammer problem // Mathematical Models and Methods of the Analysis and Optimal Synthesis of the Developing Pipeline and Hydraulic. Systems E3S Web of Conferences, 2022. 397. P. 01006 (2023).

Сидлер Инна Владимировна

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: [inna.sidler@mail.ru](mailto:inna.sidler@mail.ru)



## МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ РАБОТЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

© 2023 г. Н. Ю. УЛЬЯНОВА

**Аннотация.** Рассматривается задача поиска оптимального режима работы энергетических источников на суммарную нагрузку в течение нескольких периодов времени как задача математического программирования с разрывной целевой функцией. Предлагается переформулировка исходной задачи оптимизации в виде частично целочисленной задачи выпуклого квадратичного программирования. Для повышения эффективности решения задачи целочисленного программирования используются кусочно-линейные аппроксимации целевой функции сверху и снизу. Приводятся результаты численных экспериментов, выполненных с применением различных решателей, демонстрирующих эффективность предлагаемых аппроксимаций.

**Ключевые слова:** генерация энергии, модель энергетической системы, целочисленная оптимизация, линейная аппроксимация, квадратичная оптимизация.

**AMS Subject Classification:** 90-05

**1. Модель генерации энергии.** Рассматривается обобщение модели минимизации расходов на генерацию энергии несколькими источниками [1], представляющее собой задачу квадратичного программирования с целевой функцией, претерпевающей разрыв первого рода в нуле:

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = Q, \quad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$f_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j = 0, \\ \alpha_j x_j^2 + \beta_j x_j + \gamma_j, & \text{если } x_j > 0, \end{cases} \quad (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j > 0)$$

где  $x_j$  – энергия, вырабатываемая источником  $j$ ,  $Q$  – запрашиваемая нагрузка;  $\bar{x}_j$  – энергетические возможности источника  $j$ ,  $n$  – количество источников,  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  – параметры модели.

Целевая функция в такой задаче имеет разрыв первого рода в нуле и не может быть решена стандартными методами оптимизации, основанными на использовании производных. Переформулируем исходную задачу 1 – 3 в задачу целочисленного программирования.

Пусть числовой параметр  $Q_t$  принимает различные значения в зависимости от дискретного момента времени  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , ( $T$  – горизонт планирования). Он определяет объем энергии, требуемый в каждый момент времени. Бинарные переменные  $z_{tj}$  отвечают за состояние источника ("работает"/"не работает"). Для того чтобы учитывать время ввода и вывода в эксплуатацию источника  $j$ , введем параметры  $k_j^+, k_j^-$ . С учетом введенных обозначений модель можно переписать следующим образом:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_{tj}) + z_{tj} \gamma_j \rightarrow \min \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{tj} = Q_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5)$$

$$k_j^+ \delta_{tj} \leq \sum_{\tau=t-k_j^+}^{t-1} z_{\tau j}, \quad (6)$$

$$k_j^- (1 - \delta_{tj}) \leq \sum_{\tau=t+1}^{t+k_j^-} z_{\tau j}, \quad (7)$$

$$0 \leq x_{tj} \leq \delta_{tj} \bar{x}_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$\delta_{tj} = 0 \vee 1, \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

$$z_{tj} = 0 \vee 1, \quad t = -(k_j^+ - 1), \dots, T + k_j^-, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где

$$z_{tj} = \begin{cases} 0, & \text{если источник } j \text{ в момент } t \text{ выключен,} \\ 1, & \text{если источник } j \text{ в момент } t \text{ включен,} \end{cases}$$

$\varphi_j(x_{tj}) = \alpha_j x_{tj}^2 + \beta_j x_{tj}$  – функция переменных издержек,  $\gamma_j$  – постоянные издержки.

Взаимосвязь между переменными  $z_{tj}$  и  $\delta_{tj}$  представлена в таблице 1

$z_{tj}$	$\delta_{tj}$	Интерпретация
$z_{tj} = 0$	$\delta_{tj} = 0$	Оборудование $j$ в момент $t$ находится в “холодном резерве”, т.е. выключено.
$z_{tj} = 1$	$\delta_{tj} = 0$	Оборудование $j$ в момент $t$ находится в “горячем резерве”, т.е. включено, но не может иметь нагрузки.
$z_{tj} = 1$	$\delta_{tj} = 1$	Оборудование $j$ в момент $t$ находится в “рабочем состоянии”, т.е. включено и может иметь нагрузку.

ТАБЛИЦА 1. Взаимосвязь между переменными  $z_{tj}$  и  $\delta_{tj}$

При этом издержки можно описать следующим образом:

$$\varphi_j(x_{tj}) + z_{tj} \gamma_j = \begin{cases} 0, & \text{если } z_{tj} = 0 \text{ и } \delta_{tj} = 0, \\ \gamma_j, & \text{если } z_{tj} = 1 \text{ и } \delta_{tj} = 0, \\ \varphi_j(x_{tj}) + z_{tj} \gamma_j, & \text{если } z_{tj} = 1 \text{ и } \delta_{tj} = 1. \end{cases}$$

Задача 4–10 представляет собой задачу нелинейного частично целочисленного программирования. Она может быть решена различными методами дискретной оптимизации. С практической точки зрения, наиболее подходящим является использование какого-либо решателя, позволяющего расширить постановку исследуемой задачи. Учитывая вид целевой функции в работе рассмотрены ее аппроксимации сверху и снизу линейными функциями. Точность решения улучшается за счет увеличения количество разбиений на которых строится функция.

**2. Вычислительные эксперименты.** Расчеты проводились на ноутбуке с 4-х ядерным процессором Intel(R) Core(TM) i5-10210U с базовой тактовой частотой 1.60GHz (максимальной тактовой частотой 4.20GHz в режиме Turbo), ОЗУ 8 ГБ под управлением 64-разрядной операционной системы MS Windows.

Решение тестовых примеров осуществлялось с использованием коммерческого пакета AIMMS и с применением программы, написанной на языке Python которая использует некоммерческий решатель SCIP 8.0 (<https://optimization-online.org/?p=18429>)

2.1. *Пример 1.* Рассмотрим пример. Пусть имеются пять источников, информация по которым представлена в таблице 2

В таблице 3 приведено необходимое общее количество энергии в каждый момент времени.

Требуется рассчитать количество электроэнергии, которую необходимо вырабатывать каждой станцией в каждый момент времени с учетом минимизации издержек. Считаем, что в исходном состоянии все станции выключены. Для аппроксимации целевой функции промежутки ее определения разбивались на три части.

В результате запуска решателей с представленными исходными данными получились следующие абсолютные и относительные погрешности решения аппроксимированных задач: для аппроксимации сверху – 0.108 и 1.7E-07; для аппроксимации снизу – 0.092 и 1.4E-07, соответственно. Время поиска оптимального решения для нелинейной задачи – 0.18 сек., для аппроксимации сверху – 0.1 сек., для аппроксимации снизу – 0.09 сек.

В таблице 4 представлено решение  $x_{tj}$  (сколько каждая станция будет производить в момент времени  $t$ ). Решения нелинейной задачи и обоих аппроксимированных задач с точностью до десятитысячных имеют одинаковый вид и могут быть представлены единой таблицей 4.

2.2. *Решение задач различных размерностей.* Для сравнения времени решения нелинейных и аппроксимированных задач псевдослучайным образом сгенерированы множество экземпляров с 10 станциями и горизонтом планирования, варьируемым от 100 до 1000 временных промежутков.

На рисунке 1 представлены зависимости времени решения (в секундах) от количества временных промежутков для нелинейной модели и аппроксимированных моделей, использующих разбиение на три промежутка. Нелинейная задача решалась как с использованием коммерческого пакета AIMMS [2], который был доступен до января 2023 года, так и с применением свободно распространяемого решателя SCIP [3]. Аппроксимированные задачи решались только решателем SCIP. Отметим, что относительная ошибка для всех задач не превосходит 1.4E-06.

	$\alpha_j$	$\beta_j$	$\varphi_j$	$\bar{x}_j$	$k_j^+$	$k_j^-$
Источник 1	0.000586	0.018663	17824.56	50	2	2
Источник 2	0.000737	0.019581	20334.8	130	2	2
Источник 3	0.001301	0.013195	18612.56	70	2	2
Источник 4	0.001082	0.024692	21735.97	70	1	2
Источник 5	0.000594	0.012273	24756.76	120	1	1

ТАБЛИЦА 2. Таблица исходных данных.

Момент времени	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q(t)$	0	60	0	0	390	300	300	300	300	0

ТАБЛИЦА 3. Необходимый объем энергии в каждый момент времени.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Источник 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Источник 2	0	0	0	0	130	113.3595	113.3595	113.3595	113.3595	0
Источник 3	0	0	0	0	70	66.64051	66.64051	66.64051	66.64051	0
Источник 4	0	60	0	0	70	0	0	0	0	0
Источник 5	0	0	0	0	120	120	120	120	120	0
<b>Итого</b>	<b>0</b>	<b>60</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>390</b>	<b>300</b>	<b>300</b>	<b>300</b>	<b>300</b>	<b>0</b>

ТАБЛИЦА 4. Решение: сколько энергии необходимо производить каждому источнику

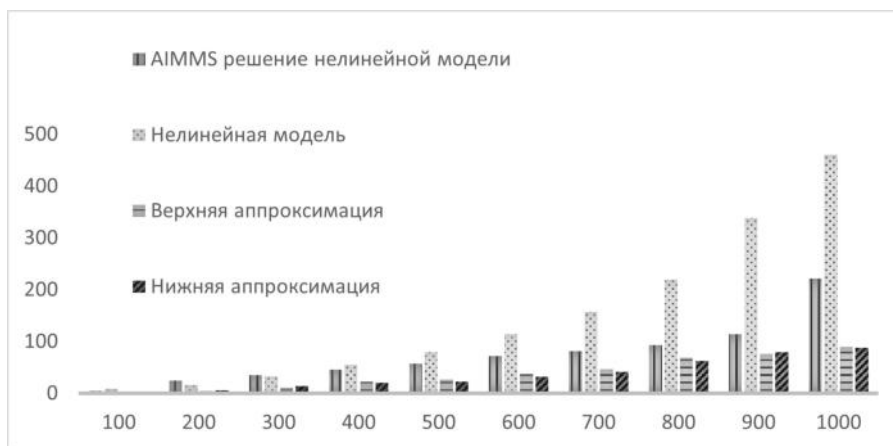


Рис. 1. Время решения задач в зависимости от размерности и решателя.

**3. Заключение и выводы.** В результате проведенного численного исследования можно сделать следующие выводы. Во-первых, бесплатный решатель SCIP показал приемлемое время решение аппроксимированных задач большой размерности: 10 источников и 6000 временных интервалов – менее 60 минут. Во-вторых, увеличение точек разбиения области определения целевой функции в предлагаемых кусочно-линейных аппроксимациях не дает существенного эффекта, достаточно использовать 3-5 точек разбиения. В-третьих, полученные авторами теоретические оценки общей погрешности аппроксимаций слишком консервативны – ошибки, полученные в результате вычислительных экспериментов, получаются заметно меньше. И, наконец, выпуклая частично целочисленная модель и ее программная реализация может быть достаточно просто расширена добавлением новых линейных ограничений, что будет сделано в дальнейшем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стенников В. А., Хамисов О. В., Стенников Н. В. Оптимизация совместной работы источников тепловой энергии // Электрические станции. 2011. 3. С. 27–32.
2. AIMMS (Acronym for Advanced Interactive Multidimensional Modeling System). URL: <https://www.aimms.com>.
3. SCIP. URL: <https://scipopt.org/>.

Ульянова Надежда Юрьевна

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: [nadinmix@mail.ru](mailto:nadinmix@mail.ru)



## ИЕРАРХИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТЫ И ПЕРЕТОКОВ МОЩНОСТИ В СЕТЯХ С НИЗКОЙ ИНЕРЦИЕЙ

© 2023 г. О. О. ХАМИСОВ

**Аннотация.** Увеличение использования преобразовательных устройств в современных электросетях, с одной стороны, улучшает управляемость сетей, а с другой стороны, снижает устойчивость электромеханических переходных процессов. Эти эффекты особенно заметны при возникновении больших возмущений или аварий в сетях. В работе предлагается система управления, объединяющая регулирование частоты и регулирование перетоков активной мощности. Известно, что в ряде сценариев невозможно одновременно достичь целей обоих регулирований. Предложенная система управления в реальном времени идентифицирует такие ситуации и отдает приоритет одной из целей. Кроме того, предложенная система управления работает распределенным образом, что позволяет использовать весь потенциал распределенной генерации и управления нагрузками. Алгоритм управления основан на последовательном применении прямодвойственного подхода к задачам регулирования частоты и перетоков мощности. Доказана асимптотическая устойчивость системы управления, эффективность которой подтверждена детальными симуляциями в программно-аппаратном комплексе RTDS NovaCor 1.0.

**Ключевые слова:** регулирование частоты, регулирование перетоков мощности, прямодвойственные алгоритмы, программно-аппаратный комплекс.

**AMS Subject Classification:** 93B70

### 1. Постановка задачи.

**1.1. Физическая система.** Модель собрана из отдельных блоков, представленных в [1]. Магистральная электрическая сеть задается ориентированным графом  $\Gamma = (N, E)$ , где  $N$  – множество  $n$  шин (вершин),  $|N| = n$  и  $E$  – множество  $q$  линий (ребер). Множество генераторных шин обозначается через  $G$ . Без потери общности мы считаем, что генераторными являются первые  $g$  шин графа:  $G = \{1, \dots, g\} \neq \emptyset$ . Остальные шины являются нагрузками:  $L = \{g+1, \dots, g+l\}$ ,  $g+l = n$ . Для описания переходных процессов используется классическая модель синхронного генератора с тремя моделями турбин: 1) трехступенчатая паровая турбина с однократным промежуточным перегревом; 2) линеаризованная модель гидротурбины с временной неравномерностью первичного регулирования; 3) турбина общего вида второго порядка. Данные типы турбин находятся на шинах  $G^s, G^h, G^g \subseteq G$  соответственно. Для удобства моделирования мы предполагаем, что все управляемые преобразовательные устройства находятся на нагрузочных шинах. Нагрузки считаются безынерционными и частотозависимыми, а динамика преобразовательных устройств моделируется блоком первого порядка. Динамическая модель энергосистемы задается дифференциально-алгебраическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, & (1a) \\ M\dot{\omega}_G &= -D_{G,G}\omega_G - p_G^e + p^m + r_G, & (1b) \\ 0 &= -D_{L,L}\omega_L - p_L^e + p^L + r_L, & (1c) \\ 0 &= BC^\top \theta - p, & (1d) \\ 0 &= Cp + p^e, & (1e) \\ p_{G^s}^m &= \alpha x^{1s} + \beta x^{2s} + \gamma x^{3s}, & (1f) \\ T^{1s}\dot{x}^{1s} &= -x^{1s} + v_{G^s}, & (1g) \\ T^{2s}\dot{x}^{2s} &= -x^{2s} + x^{1s}, & (1h) \\ T^{3s}\dot{x}^{3s} &= -x^{3s} + x^{2s}, & (1i) \\ T^{4s}\dot{v}_{G^s} &= -v_{G^s} + x^{4s}, & (1j) \\ T^{5s}\dot{x}^{4s} &= -x^{4s} + R^s\omega_{G^s} + u_{G^s}, & (1k) \\ p_{G^h}^m &= x^{1h} - 2v_{G^h}, & (1l) \\ T^{1h}\dot{x}^{1h} &= -x^{1h} + 3v_{G^h}, & (1m) \\ T^{2h}\dot{v}_{G^h} &= x^{2h}, & (1n) \\ T^{3h}\dot{x}^{2h} &= -x^{2h} - (R^{th} + R^h)v_{G^h} - R^{th}x^{3h} - \\ & \quad \omega_{G^h} + u_{G^h}, & (1o) \\ T^{4h}\dot{x}^{3h} &= -x^{3h} - v_{G^h}, & (1p) \\ T^{1g}\dot{p}_{G^g}^m &= -p_{G^g}^m + v_{G^g}, & (1q) \\ T^{2g}\dot{v}_{G^g} &= -v_{G^g} + R^g\omega_{G^g} + u_{G^g}, & (1r) \\ T^{cc}\dot{p}^L &= -p^L - u_L. & (1s) \end{aligned}$$

Здесь  $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$  – отклонения локальных частот от номинального значения;  $p(t) \in \mathbb{R}^q$  – перетоки мощности;  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  – значения управления.

*1.2. Цели управления.* Управление должно работать как с прямой, так и обратной связью в зависимости от доступности информации о состоянии сети. В порядке убывания приоритета оно должно выполнять следующие задачи: (i) приведение частоты к номинальному значению; (ii) удержание перетоков мощности в допустимых пределах; (iii) минимизация стоимости управления. Для каждой из этих целей формулируется задача оптимизации. В качестве ограничений используются уравнения стационарных точек системы (1), из которой после исключения ряда переменных и добавления вспомогательной переменной  $v$  получаются ограничения (2b), (2c) в задаче (2), ограничения (3b), (3c) в задаче (3), ограничения (5b), (5c) в задаче (5) ниже. Для различия переменных, имеющих один и тот же физический смысл в разных задачах используются верхние индексы: *I, II, III*. Решения задач обозначаются символом "\*" . Задачи имеют следующий вид:

*I) Регулирование частоты:*

$$\min_{u^I, \theta^I, v \in \mathbb{R}^n, p^I \in \mathbb{R}^q} \frac{1}{2} v^\top v, \quad (2a)$$

$$p^I = BC^\top \theta^I, \quad (2b)$$

$$Cp^I + u^I + v + r = 0, \quad (2c)$$

$$\underline{u}_i \leq u_i^I \leq \bar{u}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2d)$$



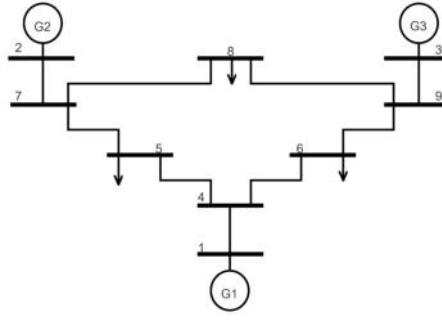


Рис. 1. 9-шинная IEEE сеть.

II) Регулирование перетоков мощности:

$$\min_{u^{II}, \theta^{II} \in \mathbb{R}^n, p^{II} \in \mathbb{R}^q} \sum_{i=1}^q h_i \phi(p_i^{II}, \underline{p}_i, \bar{p}_i), \quad (3a)$$

$$p^{II} = BC^T \theta^{II}, \quad (3b)$$

$$Cp^{II} + u^{II} + v^* + r = 0, \quad (3c)$$

$$\underline{u}_i \leq u_i^{II} \leq \bar{u}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3d)$$

где

$$\phi(x, \underline{x}, \bar{x}) = \frac{1}{2} (\max\{0, \underline{x} - x, x - \bar{x}\})^2. \quad (4)$$

III) Минимизация стоимости управления:

$$\min_{u^{III}, \theta^{III} \in \mathbb{R}^n, p^{III} \in \mathbb{R}^q} \frac{1}{2} u^{III T} A u^{III}, \quad (5a)$$

$$p^{III} = BC^T \theta^{III}, \quad (5b)$$

$$Cp^{III} + u^{III} + v^* + r = 0, \quad (5c)$$

$$\underline{u}_i \leq u_i^{III} \leq \bar{u}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (5d)$$

$$\underline{p}_i^{new} \leq p_i^{III} \leq \bar{p}_i^{new}, \quad i \in \{1, \dots, q\}, \quad (5e)$$

где

$$\underline{p}_i^{new} = \min\{\underline{p}_i, p_i^{II*}\},$$

$$\bar{p}_i^{new} = \max\{\bar{p}_i, p_i^{II*}\},$$

$$i \in \{1, \dots, q\}.$$

**2. Система управления.** Управление выводится в виде системы дифференциальных уравнений. Каждая задача оптимизации (2)-(5) переформулируется к виду, допускающему распределенное решение по принципу, представленному в статье [3]. Затем к ней применяется прямодвойственный подход [2].

**3. Численный эксперимент.** В рамках численного эксперимента рассматривается 9-шинная IEEE сеть 1, представленная в [4]. Предполагается, что линия (7-8) имеет ограничение в 80 МВт, а линия (4-6) имеет ограничение в 65 МВт. В начальный момент времени шина 8 увеличивает потребление на 25 МВт, что вызывает перегрузку на линии (7-8). Через 5 секунд шина 6 увеличивает 20 МВт вызывая перегрузку линии (4-6). В рамках работы проводится сравнение стандартного подхода к управлению с разработанным в данной статье. Симуляции проведены в программно-аппаратном комплексе RTDS NovaCor 1.0.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Machowski J., Bialek J., Bumby J.* Power System Dynamics: Stability and Control. John Wiley & Sons, Inc, 2020. 888 с.
2. *Feijer D., Paganini F.* Stability of primal-dual gradient dynamics and applications to network optimization // *Automatica*. 2010. 46. С. 1974-1981.
3. *Khamisov O. O., Terzija V.* Distributed Frequency Control and Congestion Management with Coupling Inter-Area Constraints // 2023 IEEE Belgrade PowerTech, Belgrade, Serbia. 2023. С. 1–6.
4. *Arunprasanth S., Meiklejohn H., Wierckx R.* Benchmarking Standard Power Test Systems for Real-Time Simulation Studies // Proc. Cigre Session 2018. 2018.

Хамисов Олег Олегович

Сколковский институт науки и технологии (Сколтех)

E-mail: O.Khamisov@skoltech.ru



## МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ЖИЛИЩНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

© 2023 г. Н. Н. ШЕЛОМЕНЦЕВА

**Аннотация.** Для решения многокритериальной задачи о согласовании разнонаправленных интересов экономических субъектов в жилищном строительстве использована аддитивная свертка критериев. Найдены решения при различных входных данных.

**Ключевые слова:** многокритериальная задача, жилищное строительство, аддитивная свертка функций.

**AMS Subject Classification:** 91B06

На первичном рынке жилья взаимодействуют следующие экономические субъекты: банки, застройщики, население и государство. На практике существует задача согласования разнонаправленных интересов экономических субъектов в жилищном строительстве. Существуют ли такие решения, при которых интересы экономических субъектов согласованы или хотя бы имеют компромисс? Такого рода задачи можно решать методами многокритериальной оптимизации [1].

Данная работа является продолжением исследования [2] о моделировании взаимодействия экономических субъектов в жилищном строительстве. В отличие от [2] решается многокритериальная задача, в которой фигурируют четыре критерия для оптимизации:

$$F(X) = \{B(X), S(X), N(X), G(X)\} \rightarrow \text{extr},$$

где

$$B(X) = \sum_{i=1}^n r\beta X_i C + \sum_{i=1}^n h\gamma X_i P_i \rightarrow \max,$$

$$S(X) = \sum_{i=1}^n (P_i - C) X_i \rightarrow \max,$$

$$N(X) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i X_i}{\sum_{i=1}^n X_i} \rightarrow \min,$$

$$G(X) = \sum_{i=1}^n (U_i - X_i)^2 \rightarrow \min.$$

$B(X)$  максимизирует доход банков,  $S(X)$  максимизирует прибыль застройщика,  $N(X)$  минимизирует среднюю цену квадратного метра для потребителя,  $G(X)$  – сокращение разности между потребностью и количеством жилья для увеличения жилищного фонда.

Основные обозначения:

$i = 1, 2, \dots, n$  – номер вида квартир;

$T$  – срок строительства многоквартирных домов;

$t$  – номер года в сроке строительства,  $t = \overline{1, T}$ .

Вводимые ниже величины будут рассматриваться в году  $t$ :

$X_i$  – количество жилья  $i$ -го вида, необходимое для увеличения жилищного фонда (искомая величина в оптимизационной задаче) (в квадратных метрах);

$V$  – планируемый ввод жилья (в квадратных метрах);

$N_i$  – количество квартир  $i$ -го вида, имеющих в жилищном фонде;

$U_i$  – потребность в жилье  $i$ -го вида домохозяйствами (в квартирах);

$S_i$  – средняя площадь жилья  $i$ -го вида;

$C$  – себестоимость одного квадратного метра жилья;

$P_i$  – цена для потребителя при покупке одного квадратного метра квартиры  $i$ -го вида;

$\beta$  – доля заемных денежных средств, выданных банком застройщикам для реализации проектов,  $0 < \beta \leq 0,9$ ;

$r$  – процентная ставка по кредиту для застройщика;

$\gamma$  – доля заемных денежных средств, выданных банком населению для покупки жилья,  $0 < \gamma \leq 0,85$ ;

$h$  – процентная ставка по ипотеке для населения.

Множество допустимых решений задано ограничением на количество строящего жилья и условиями неотрицательности:

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq V, \quad X_i \geq 0.$$

Требуется найти такой вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  из множества допустимых решений, при котором значение векторной функции  $F(X)$  векторного аргумента достигает своего экстремума (максимума или минимума).

$B(X)$  и  $S(X)$  умножим на  $(-1)$ , чтобы перейти в критериях от задачи на максимум к задаче на минимум. Преобразуем функции  $G(X)$  к виду  $G(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (U_i - X_i)^2}$ , чтобы выразить ее в тех же единицах как и другие критерии.

Для решения задачи использовалась аддитивная свертка критериев:

$$w_1(-B(X)) + w_2(-S(X)) + w_3N(X) + w_4G(X) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^4 w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1.$$

Использовался пакет MS Excel «Поиск решения», который позволяет найти решение для нелинейных задач. Определены решения для различных начальных данных. Например, при данных  $r = 0,07$ ;  $\beta = 0,6$ ;  $\gamma = 0,7$ ;  $h = 0,105$ ;  $C = 39000$ ;  $P = (75000; 68000; 6500; 60000)$ ;  $S = (33; 54; 72; 90)$ ;  $U = (511796; 362342; 154796; 101466)$ ;  $N = (201252; 422897; 356074; 57676)$ ;  $V = 1003756$  и предположении, что все экономические субъекты имеют одинаковые весовые коэффициенты  $w_i = 0,25$   $i = \overline{1,4}$  найдено оптимальное решение  $X^* = (494749; 332508; 119481; 57019)$ . Значения критериев на оптимальном плане равны  $B(X^*) = 6855600843$  руб.,  $S(X^*) = 31757577549$  руб.,  $N(X^*) = 70638$  руб.,  $G(X^*) = 2587976366$  руб.

Данные расчеты показывают, что такой подход может быть использован для решения аналогичных экономических задач.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вербичкая А. Р., Хорунжий В. А., Царькова Е. В.* Решение многокритериальной задачи в экономике // Гуманитарный научный вестник. 2020. № 4. С. 48–53.
2. *Шеломенцева Н. Н., Грушина О. В., Красноштанова Т. А.* Моделирование согласования интересов экономических субъектов в жилищном строительстве // Мир новой экономики. 2023. № 1. С. 103–116.

Шеломенцева Наталья Николаевна

Иркутский государственный университет (ИГУ)

E-mail: natshel@bk.ru



## NEURAL NETWORK FUSION OPTIMIZATION FOR PHOTOVOLTAIC POWER FORECASTING

© 2023 г. LIU SONG, D. N. SIDOROV

**АННОТАЦИЯ.** The datasets representing the different seasons including the photovoltaic data and meteorological data were employed. The neural networks fusion method is proposed using LSTM, RNN and Dense architectures. Three kinds of neural networks to train and predict each season, the final prediction model is formed by weighting are combined, and the weights are optimized using the Nelder-Mead method. The model is tested by randomly selecting data from other years and adding artificial disturbances. The test results prove that the weighted model has strong stability and generalization ability, and the prediction error is smaller than that of the single model.

**Ключевые слова:** Photovoltaic Power Forecast, LSTM, RNN, Dense, Nelder-Mead method .

**AMS Subject Classification:** 62M10

**1. Data preprocessing.** This paper uses the photovoltaic power generation data of a power station in Australia for one year[5]. Data is collected every 5 minutes, including actual power, wind speed, horizontal irradiance, diffuse irradiance, temperature, and other environmental factors. First of all, we preprocess the data, deal with data outliers and missing values, and analyze the data box plot to find that the output power is not 0 at non-sunrise time (22-6 o'clock), and there is a very small output, according to ideal, we set these non-zero values to 0. Since there are still missing values in the data, this article uses spline interpolation to supplement the missing values. After completing the above operations, we normalize and standardize the data, making the data suitable for model training. Since there are many meteorological features, we need to carry out feature engineering to conduct correlation analysis on the features, select the features with high correlation, and analyze the heat map through the correlation analysis of the data.

It can be observed that the correlation between irradiance and output power is 0.98, the correlation of temperature is 0.46, and the correlation of wind speed is 0.16. In this paper, the two characteristics of irradiance and temperature are selected for analysis. In order to observe the performance of each model in different seasons, we divided the data into four seasons of spring, summer, autumn and winter according to the seasonal dates in Australia, and trained and tested each model separately.

**2. Model building.** This paper chooses LSTM, RNN, and Dense neural network as the basic models. These three models are widely used the state of the art and have many applications in photovoltaic power prediction. After analyzing methods, many methods use data that are mostly concentrated in the same season. Due to the different climate characteristics of different seasons, the effect of the model is also different. If a single model is used to predict the whole year, the accuracy of the model will be greatly reduced. In order to confirm this point of view, this paper uses three models for each season to carry out forecast analysis. From the prediction error, it can be found that the prediction effect of each model is different in different seasons, which also confirms the above point. Therefore, in order to combine the respective advantages of the three models, this paper uses the method of weighting the models to combine the three models into one model, and uses the Nelder-Mead method to optimize the weights and select the best weight combination.

This paper constructs the LSTM layer containing 64 neurons, the Dense fully connected layer, and the neural network of the RNN layer, using the ReLU function as the activation function, and adding

an L1 regularization term to the model to prevent the model from overfitting. Finally, the resulting weighted prediction model is built, and the weights are optimized using the Nelder-Mead method to select the best weight combination. After building the model, we analyze each season separately, divide the data of each season into training set and test set, and their ratio is 80 percent and 20 percent, in order to achieve the best performance of each model. Optimizing, use the method of random search to tune the hyperparameters of each model, and finally obtain the prediction results of each season in the final model.

$$y_f = \theta_l y_l + \theta_r y_r + \theta_d y_d.$$

$y_f$  is the final prediction result, and  $\theta$  is the corresponding weight of each model.

**3. Results analysis.** By using the weighted combined model to train forecasts for each season, comparing the forecast results of the previous single model, we can find that the forecast error after the combination is smaller than that of the single model. In order to prove the generalization ability of the model, we randomly selected three months of data from other years as the verification set. In order to more realistically simulate the stability of the model in severe environments, we artificially added noise and missing disturbances to the data, and brought the data into model, the final output shows that in the presence of a large number of perturbations and missing data, the accuracy of the final model prediction results is higher than that of the individual model, which proves the stability of the model. We evaluate the model using conventional metrics: MAE, MAPE, RMSE. The final prediction results, demonstrates that the prediction error of the model constructed in this paper is much smaller than that of a single model, and the stability of the model is also good in the case of data sets with large data disturbances.

	RMSE	MAPE	MAE
LSTM	0.03967	17.41%	0.02876
Dense	0.05139	23.28%	0.04185
RNN	0.05541	22.16%	0.03814
ADWM	0.02224	10.55%	0.01322

TABLE 1. Model error

**4. Concluding remarks.** Experiments have proved that the Nelder-Mead method is very effective in improving the accuracy and stability of the fusion model. It fully combines the advantages of each model, greatly reduces the prediction error, and has certain robustness. Photovoltaic power generation is greatly affected by environmental and regional factors, so the adaptability of the model is highly required. Future research can use model fusion methods to establish a predictive model that can adapt to different environments and regions.

Liu Song  
Irkutsk National Research Technical University  
E-mail: 1972087620qq@gmail.com

Sidorov Denis Nikolaevich  
Irkutsk National Research Technical University  
E-mail: contact.dns@gmail.com



## PREDICTION INTERVAL FOR SOLAR PHOTOVOLTAIC POWER USING ARIMAX MODEL

© 2023 г. VO VAN TRUONG, D. N. SIDOROV

**АННОТАЦИЯ.** In this research, we use the ARIMAX model and estimate the probability distribution of prediction to forecast interval for solar photovoltaic power data. Forecast interval not only allows us to predict future expected energy at a point in time, but also provides the range of values that future data may fall within. In our experiment, the estimated standard deviation value of the forecast distribution and error values of the prediction are continuously updated after each prediction step based on the forecast results of data points from the history, which helps the accuracy of the forecast to be close to with a more realistic value. Experimental results show that the built model is suitable when giving good predictive results on the test data.

**Ключевые слова:** Prediction Interval, ARIMAX, Photovoltaic Power.

**AMS Subject Classification:** 62M10

**1. Data collection and preprocessing.** The photovoltaic power data for this research was collected by us from an Australian power station for 1 year [2], data is collected every 5 minutes including information such as: actual power, temperature, wind speed, humidity, horizontal radiation, diffuse horizontal radiation, rainfall and other weather factors. The data after collected is preprocessed and used to build a training model in which the actual power value is described as dependent variable and the parameters: temperature, wind speed, humidity, horizontal radiation, diffuse horizontal radiation, rainfall are interpreted as independent variables.

**2. Model building.** ARIMA model is a class of models used to analyze and forecast time series data in which the input data is the historical information of the variable to be forecasted, an ARIMA model it is a combination of AR (Autoregression) and MA (Moving average) models and component I (Integrated) to process and ensure stationarity of data [1] [4] [7]. In this research, we use the ARIMAX (Autoregressive Integrated Moving Average with Exogenous Regressors) Model: This is an extended model of the ARIMA model by combining the components of the ARIMA model presented above and Environmental variables, like the multivariable linear regression model, the ARIMAX model also uses these parameters as independent variables to predict the value of the dependent variable to improve the accuracy of the forecast. In the ARIMAX model these variables are called Exogenous (X) Variables [6], in this research Exogenous (X) Variables are interpreted as information about weather values such as: temperature, wind speed, humidity, horizontal radiation, diffuse horizontal radiation, rainfall.

**3. Prediction interval.** Assuming that the distribution of future observations and the error of the prediction are variables according to the Normal distribution [5], the formula for determining the confidence interval is as follows:

$$y_{\text{interval}} = \hat{y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} * \sigma$$

**In there:**

$y_{\text{interval}}$  - is the prediction interval of the output variable

$\hat{y}$  - is the value of the point prediction result

$z_{\frac{\alpha}{2}}$  - Normal distribution value

$\sigma$  - is the standard deviation of the prediction distribution

where the value of  $\sigma$  is estimated through the error of the prediction [3], called residual ( $e_i$ ) with  $n$  being the number of observations we have:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2}$$

The residual is calculated as the difference between the actual value and the point predicted value of the model [1] [5]. Notice that at a time when we are predicting the interval for any data point, we do not know the actual value of the data. Therefore, computing residuals and the standard deviation of prediction distribution is challenging. So the idea is that we can believe that the error of predictions in the very near past might continue to occur in the present. Thus, the solution here is to calculate the standard deviation of the prediction distribution at step  $t$  we will use the standard deviation of the prediction distribution in step  $t-1$ . In addition, as the past data points are further away from the present, the correlation between these values may decrease, so determining the number of data points in the past to calculate the residual should be considered. In this research, we use the sliding window method in which a maximum value of the number of past observations that need to be calculated is defined as a window, after each prediction the window will slide forward by one step. The following is an algorithm diagram describing the specific steps:

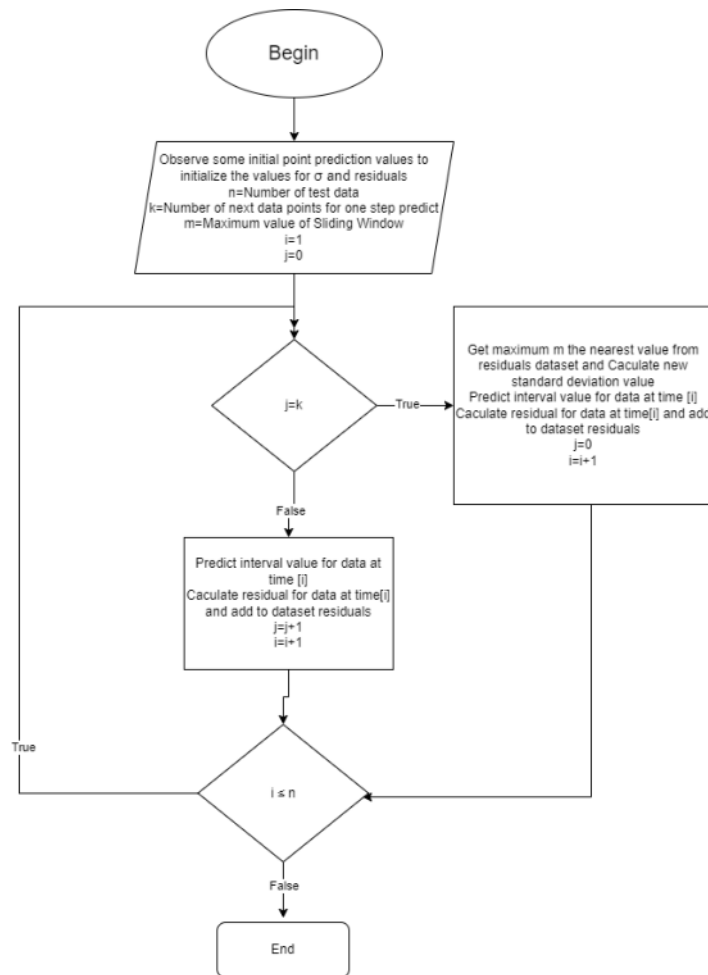


Рис. 1: Algorithm diagram

**4. Experimental results.** In this research, we conducted experiments on 104901 data points in which 95% of the past data points are used to train the model and 5% of the next data points are used for testing, with 1500 the first data point is used to calculate the initial error values of the prediction and the remaining 3745 data points (about 13 days) are used to experimentally predict for interval value.



**Evaluate point prediction results:**

R-squared: 0.9778013798995265
Mean Absolute Error: 0.18597653086191154
Mean Squared Error: 0.08784616256147601
Root Mean Squared Error: 0.29638853311401236

The result in the case of forecasting interval for the next 10 observed data points each step:

- With 95% confidence interval:

Evaluate the lower bound predicted values with the actual values	Evaluate the upper bound predicted values with the actual values
R-squared: 0.9847859957740538	R-squared: 0.8780797029080011
Mean Absolute Error: 0.142178385598837	Mean Absolute Error: 0.6808352810957619
Mean Squared Error: 0.0676141923884092	Mean Squared Error: 0.5418391043675227
Root Mean Squared Error: 0.2600272916222626	Root Mean Squared Error: 0.7360972112211285
Percentage of Actual Data within Prediction Interval: 88.76 %	

- With 90% confidence interval:

Evaluate the lower bound predicted values with the actual values	Evaluate the upper bound predicted values with the actual values
R-squared: 0.9875136598230249	R-squared: 0.9028217907059246
Mean Absolute Error: 0.12561435486646322	Mean Absolute Error: 0.5969345523675982
Mean Squared Error: 0.055491887238555665	Mean Squared Error: 0.431880131067996
Root Mean Squared Error: 0.23556716078128476	Root Mean Squared Error: 0.657175875293666
Percentage of Actual Data within Prediction Interval: 81.66 %	

- With 99% confidence interval:

Evaluate the lower bound predicted values with the actual values	Evaluate the upper bound predicted values with the actual values
R-squared: 0.9754130183882824	R-squared: 0.8201211209397397
Mean Absolute Error: 0.1976218885872674	Mean Absolute Error: 0.8472630530242303
Mean Squared Error: 0.1092696492163328	Mean Squared Error: 0.7994190717161697
Root Mean Squared Error: 0.3305596000970669	Root Mean Squared Error: 0.8941023832404037
Percentage of Actual Data within Prediction Interval: 96.93 %	

The result in the case of forecasting interval for the next 100 observed data points each step:

- With 95% confidence interval:

Evaluate the lower bound predicted values with the actual values	Evaluate the upper bound predicted values with the actual values
R-squared: 0.9848999734685494	R-squared: 0.8787222158797937
Mean Absolute Error: 0.14164283144862344	Mean Absolute Error: 0.6799007331058622
Mean Squared Error: 0.06710765185843637	Mean Squared Error: 0.5389836433697702
Root Mean Squared Error: 0.2590514463546505	Root Mean Squared Error: 0.7341550540381577
Percentage of Actual Data within Prediction Interval: 88.33 %	

**5. Conclusions.** From the experimental results, we have a few observations as follows: The larger the confidence interval, the higher the actual number of data points in the forecast range, but the distance between the upper and lower prediction lines gradually becomes larger with to the actual data line. The farther the forecast point is, the lower the accuracy of the forecast, so one of the problems to be solved is how to ensure that the forecast interval has a high accuracy. This mean the large percentage of actual values that fall within forecast range, but the forecast interval must be narrow and still ensure the correct interpretation of the actual data, in addition, we also need to improve the forecast quality when forecasting more distant times. These are issues that we will continue to research and improve.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chatfield C.* Time-Series Forecasting. London/Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC press., 2000.
2. *Desert Knowledge Australia Centre, Alice Springs. Sanyo, 6.3kW, HIT Hybrid Silicon 2011* <http://dkasolarcentre.com.au/historical-data/download>.
3. *Durga L., Solomatine D.* Machine learning approaches for estimation of prediction interval for the model output // *Neural Networks* 19. 2006. P. 225–235.
4. *Brownlee J.* Introduction to Time Series Forecasting with Python, 2020.
5. *Hyndman R., Athanasopoulos G.* Forecasting Principles and Practice (2nd). Monash University, Australia., 2018.
6. *Shilpa G. N., Sheshadri G. S.* ARIMAX Model for Short-Term Electrical Load Forecasting // *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)*. November 2019. 8, № 4. P. 2786–2790. DOI: [10.35940/ijrte.D7950.118419](https://doi.org/10.35940/ijrte.D7950.118419).
7. *Uppala Meena Sirisha, Manjula C. Belavagi, and Girija Attigeri.* Profit Prediction Using ARIMA, SARIMA and LSTM Models in Time Series Forecasting: A Comparison // *IEEE Access* 28 November 2022. 10. DOI: [10.1109/ACCESS.2022.3224938](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3224938).

Vo Van Truong

Irkutsk National Research Technical University

E-mail: [vvtruong@ictu.edu.vn](mailto:vvtruong@ictu.edu.vn)

Denis Nikolaevich Sidorov

Irkutsk National Research Technical University

E-mail: [contact.dns@gmail.com](mailto:contact.dns@gmail.com)

*Научное издание*

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:  
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ  
(DYSC 2023)**

Материалы 5-й Международной конференции  
Иркутск, 18–23 сентября 2023 г.

ISBN 978-5-9624-2182-7

*Материалы публикуются в авторской редакции*

Темплан 2023 г. Поз. 80  
Уч.-изд. л. 16, 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ  
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124