Решение интегральных уравнений методом резольвенты.

В.А. Фартушная, Е.Ю. Гражданцева

Частные примеры интегральных уравнений начали появляться в первой половине 19-го века и стали объектом особого внимания после того, как удалось свести решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа к исследованию линейного интегрального уравнения 2-го рода.

Построение общей теории линейных интегральных уравнений было начато в конце 19-го века. Основоположниками этой теории считается В. Вольтера, Э. Фредгольм, Д. Гильберт и Э. Шмидт.

Ещё до исследований этих ученых для построения решения был предложен метод последовательных приближений.

При изучении уравнения колеблющейся мембраны А. Пуанкаре пришел к идее введения переменного численного параметра λ в интегральное уравнение в качестве коэффициента при интеграле. [1]

Для интегральных уравнений типа:

$$\varphi(s)+\lambda\int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt = f(s),$$

где $\varphi(s)$ - искомая функция, λ - числовой параметр, $k(s,t)$, $f(s)$ - заданные функции, метод резольвенты позволяет выписать решение в виде:

$$\varphi(s) = f(s)+\lambda\int_a^b R(s,t,\lambda)f(t)dt$$

где $R(s,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_n(s,t)$ - функция переменных s и t, и числового параметра λ, котоую называют резольвентой ядра $k(s,t)$, $k_n(s,t)$ - итерированные ядра, которые определяются рекуррентными формулами:

$$k_0(s,t)=k(s,t);$$

$$k_n(s,t)=\int_a^b k(s,y)k_{n-1}(y,t)dy, n\in \mathrm{N} \qquad \text{(см. [2,3]).}$$

Решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(s)+\lambda\int_a^s k(s,t)\varphi(t)dt = f(s)$$

выстраивается аналогичным образом.

Например, интегральное уравнение Вольтерра

$$u(s)=\lambda\int_0^s (s-t)u(t)dt+f(s), \lambda>0,$$

имеет решение вида

$$u(s)=\sqrt{\lambda}\int_0^s sh(\sqrt{\lambda}(s-t))f(t)dt+f(s),$$

так как резольвента ядра $k(s,t)=s-t$ имеет вид

$$R(s,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\lambda^{n}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{\lambda}(s-t))^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}sh(\sqrt{\lambda}(s-t))\,.$$

Литература.

1. Математическая энциклопедия. Ред.коллегия: И.М. Виноградов (гл.ред) [и др.] Т.2 – М., «Советская энциклопедия», 1997г.

2. Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. / Ф.Р. Колмогоров, С.В. Фомин - М.: Наука, 1989. - 624с.

3. Шароглазов В.С. Теория операторов в задачах: Уч. пособие. / В.С. Шароглазов – Иркутск: Иркутский университет, 1985. - 90с.