Исследование модели роста и деления клеток.

Д.И. Гаврилина, Е.Ю. Гражданцева

Двухстадийная модель роста – это модель роста клеточной популяции, состоящая из двух стадий (стадии роста и стадии деления) и дополнительных стадий самовоспроизведения.

Как показали экспериментальные материалы, рост или динамику многих популяций можно описать с помощью математической модели роста клеточных популяций. Поскольку такая модель отображает взаимодействие клеток и химических веществ в растущей популяции в виде химических реакций посредством квазихимических уравнений, её называют квазихимической моделью роста клеточной популяции.

При отсутствии внешних воздействий такая модель имеет вид укороченной цепочки [1]

$$C_1 \to C_2 \to C_3 \to C_m \to fC_m,$$

где C_1, C_2, C_3 - клетки разных возрастов, C_m - материнская клетка, f - коэффициент размножения.

Однако такая модель представляет собой статическое описание системы роста популяции.

Переход от статического описания системы к динамическому происходит тогда, когда в модель вводится время, поскольку, чтобы понять динамику объекта, необходимо знать каким образом осуществляется его изменение во времени.

После введения в эту модель такого параметра как время (t), она принимает вид системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. При условии отсутствия внешних воздействий такая система имеет вид [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = -pC_1 + fbC_m, \\ \dfrac{dC_m}{dt} = pC_1 - bC_m - aC_1C_m, \end{cases}$$

где C_1 - совокупность растущих клеток, C_m - совокупность материнских клеток, $C_1 = C_1(t)$, $C_m = C_m(t)$, t - переменная (время), a - кинетический коэффициент самовоспроизведения, b - кинетический коэффициент рождения (разветвления), p - кинетический коэффициент роста (продолжения), f - коэффициент размножения.

Так как первое уравнение системы описывает более быстрое изменение по сравнению со вторым уравнением этой системы, к системе применима Теорема Тихонова о малом параметре [2].

Тогда, после применения к системе дифференциальных уравнений Теоремы Тихонова о малом параметре, сама система примет вид системы уравнений, одно из которых будет алгебраическим, а другое останется дифференциальным. Что, в свою очередь, приводит к разрешению системы.

Используя описанный выше способ, получим, что функция $C_1 = C_1(t)$, описывающая численность растущих клеток популяции имеет вид

$$C_1(t) = \frac{b(f-1)}{Ae^{-b(f-1)t} + a}$$

где A - постоянная интегрирования, значение которой определяется из начальных условий.

Литература.

1. Ершов Ю.А., Щукин С.И. Биотехнические системы медицинского назначения в 2 ч. Часть 1. Количественное описание биообъектов, 2020 / Гриф УМО ВО.

2. Тихонов А.Н, Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. / А.Н. Тихонов - Матем. сб., 1952, Т 31(73), № 3, С. 575 - 586 (Math-Net/Ru).