Задача Дирихле для многомерных эллиптических систем

Т.В. Левченко

В 1937 году И. Г. Петровский выделил широкий класс систем уравнений в частных производных, называемых теперь эллиптическими по Петровскому. Решения таких систем обладают многими свойствами, характерными для решений одного эллиптического уравнения.

Определение. Система уравнений в частных производных называется эллиптической по Петровскому, если определитель ее характеристической матрицы является положительным либо отрицательно определенной формой.

Свойства разрешимости классических граничных задач для эллиптических по Петровскому систем существенно отличаются от случая одного уравнения. В 1948 году А.В.Бицадзе построил пример эллиптической по Петровскому системы двух уравнений второго порядка, для которого нарушалась нетеровость задачи Дирихле. В связи с системой Бицадзе для эллиптических по Петровскому систем возник вопрос классификации граничных задач по характеру их разрешимости. Классические граничные задачи для эллиптических по Петровскому систем не всегда нетеровы, поэтому класс таких систем, для которых задача Дирихле корректна, должен характеризоваться некоторыми дополнительными ограничениями. Вскоре такие дополнительные ограничения нашел М.И.Вишик. Он усилил условия эллиптичности по Петровскому требованием сильной эллиптичности, то есть либо положительной, либо отрицательной определенностью симметричной составляющей характеристической матрицы системы.

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для системы

$$\begin{cases} -L[u]+\lambda\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_x+v_y+w_z\right)=0, \\ -L[v]+\lambda\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_x+v_y+w_z\right)=0, \\ -L[u]+\lambda\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_x+v_y+w_z\right)=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $L=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+c^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $c=const$ в следующей постановке: найти регулярные в полупространстве $D:\{z>0\}$ решения системы (1), удовлетворяющие на границе этого полупространства условиям

$$u\big|_{z=0}=f(x,y),\quad v\big|_{z=0}=g(x,y),\quad w\big|_{z=0}=h(x,y), \tag{2}$$

где $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Введем обозначение

$$H=u_x+v_y+w_z. \tag{3}$$

Тогда система перепишется в виде

$$\begin{cases} L[u] = \lambda H_x, \\ L[v] = \lambda H_y, \\ L[u] = \lambda H_z. \end{cases} \tag{4}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4) по x, второе – по y, третье – по z и сложим результаты дифференцирований

$$(1-\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + (c^2-\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \tag{5}$$

Применим к уравнению (5) преобразование Фурье по переменным x, y

$$(c^2-\lambda)\tilde{H}_{zz} - (1-\lambda)\rho^2 \tilde{H} = 0, \tag{6}$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\tilde{H}(\xi,\eta,z)$ - преобразование Фурье функции $H(x,y,z)$. Это линейное однородное уравнение. Ограниченные на бесконечности решения уравнения (6) имеют вид

$$\tilde{H} = B(\xi,\eta)\, e^{-\rho\sqrt{\frac{1-\lambda}{c^2-\lambda}}z}. \tag{7}$$

Применим преобразование Фурье к системе (4). Ее общее решение в терминах преобразования Фурье с учетом (7) имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{u}(\xi,\eta,z) = A_1(\xi,\eta)\, e^{-\frac{\rho}{c}z} + \dfrac{c^2-\lambda}{\rho^2(1-c^2)} i\xi B(\xi,\eta)\, e^{-\rho\sqrt{\frac{1-\lambda}{c^2-\lambda}}z}, \\ \tilde{v}(\xi,\eta,z) = A_2(\xi,\eta)\, e^{-\frac{\rho}{c}z} + \dfrac{c^2-\lambda}{\rho^2(1-\lambda)} i\eta B(\xi,\eta)\, e^{-\rho\sqrt{\frac{1-\lambda}{c^2-\lambda}}z}, \\ \tilde{w}(\xi,\eta,z) = A_3(\xi,\eta)\, e^{-\frac{\rho}{c}z} + \dfrac{c^2-\lambda}{\rho(1-c^2)}\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{c^2-\lambda}} B(\xi,\eta)\, e^{-\rho\sqrt{\frac{1-\lambda}{c^2-\lambda}}z}, \end{cases} \tag{8}$$

где $A_1(\xi,\eta)$, $A_2(\xi,\eta)$, $A_3(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$ - произвольные функции. Чтобы их найти, используем граничные условия (2) и соотношение (3), применив к ним преобразование Фурье. Получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} A_1(\xi,\eta) + \dfrac{c^2-\lambda}{\rho^2(1-c^2)} i\xi B(\xi,\eta) = f(\xi,\eta), \\ A_2(\xi,\eta) + \dfrac{c^2-\lambda}{\rho^2(1-c^2)} i\eta B(\xi,\eta) = g(\xi,\eta), \\ A_3(\xi,\eta) - \dfrac{c^2-\lambda}{\rho(1-c^2)}\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{c^2-\lambda}} B(\xi,\eta) = h(\xi,\eta), \\ i\xi A_1(\xi,\eta) + i\eta A_2(\xi,\eta) - \dfrac{\rho}{c} A_3(\xi,\eta) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи Дирихле (1)-(2) свелся к исследованию алгебраической системы (9). Справедливо утверждение

Утверждение. Если система (9) имеет единственное решение, то и рассматриваемая задача Дирихле будет иметь единственное решение в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций.