Сравнение операционного метода и метода Эйлера решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

П. А. Солдатова

Преобразование Лапласа — интегральное преобразование, связывающее функцию $F(p)$ комплексного переменного (изображение) с функцией $f(x)$действительного переменного (оригинала). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения. Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями.

Во второй половине XIX века многие математики (в том числе и в России) занимались символическим исчислением, в основе которого лежит построение математического анализа как системы формальных операций над символом $p = \frac{d}{dt}$, где t - независимая переменная. Строгое обоснование символическое или, как теперь его называют, операционное исчисление нашло в двадцатых годах прошлого столетия в трудах Т. Бромвича, Д. Карсона и др. Они связали этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований, который с успехом применяли еще Коши, Лаплас и др. При этом символ p получил новое толкование, как комплексное переменное, а вместе с ним новую трактовку получил и сам операционный метод как метод, основанный на преобразовании Лапласа.

В настоящей работе рассмотрена история возникновения и развития операционного исчисления, его применение к различным задачам математики. Особое внимание уделено решению задачи Коши для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \qquad (2)$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до второго порядка включительно являются функциями-оригиналами.

Пусть $x(t) \doteqdot X(p),\ f(t) \doteqdot F(p)$. По правилу дифференцирования оригиналов с учетом (2) имеем

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0, \quad x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px_0 - x_1,$$

Применяя к обеим частям преобразование Лапласа

$$(p^2 + a_1 p + a_2)X(p) = F(p) + x_o(p + a_1) + x_1, \qquad (3)$$

Решая уравнение (3), найдем операторное решение

$$X(p) = \frac{F(p)+x_0(p+a_1)+x_1}{p^2+a_1p+a_2}.$$

Находя оригинал для $X(p)$, получаем решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).
Аналогично можно решить любое уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и с начальными условиями при $p = 0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$2x" - 2x' = (t+1)e^t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \qquad x'(0) = \frac{1}{2}$$

Решим эту задачу сначала с помощью преобразования Лапласа. Переходим в пространство изображений

$$x(t) \to x(p),$$

$$x'(t) \to px(p) - x(0) = px(p) - \frac{1}{2},$$

$$x''(t) \to p^2x(p) - px(0) - x'(0) = p^2x(p) - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2},$$

$$te^t \to \frac{1}{(p-1)^2}, \quad e^t \to \frac{1}{p-1}.$$

Подставим все в исходное уравнение и получим операторное уравнение

$$2\left(p^2x(p) - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\right) - 2\left(px(p) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1}.$$

Его решение легко найти

$$x(p) = \frac{p^3 - 2p^2 + 2p}{2p(p-1)^3}.$$

Заметим, что начальные условия были уже использованы при переходе к изображениям. И нам остается только вернуться к оригиналам. Для этого разложим дробь, стоящую в правой части последнего равенства, на сумму простых дробей

$$x(p) = \frac{1}{2} * \frac{1}{p-1} + \frac{1}{4} * \frac{2}{(p-1)^3}$$

Переходим в пространство оригиналов. Учитывая, что $\frac{1}{p-1} \to e^t$, $\frac{2}{(p-1)^3} \to e^t\, t^2$, получим

Ответ: $x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^t t^2.$

Теперь решим эту же задачу методом Эйлера.

$$2x" - 2x' = (t+1)e^t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \qquad x'(0) = \frac{1}{2}$$

Сначала найдем общее решение однородного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$2\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

$$2\lambda(\lambda - 1) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1,$$
$$x_{\text{о.о}} = C_1 e^0 + C_2 e^t = C_1 + C_2 e^t$$
Поскольку 1 является корнем характеристического уравнения (имеем резонансный случай), частное решение будем искать в виде
$$x_{\text{ч.н}} = (At^2 + Bt)e^t = At^2 e^t + Bte^t,$$
где A и B – неопределенные коэффициенты.

Найдем производные, входящие в уравнение
$$x' = 2Ate^t + At^2 e^t + Be^t + Bte^t,$$
$$x'' = 2Ae^t + 2Ate^t + 2Ate^t + At^2 e^t + Be^t + Bte^t$$
$$= At^2 e^t + 4Ate^t + 2Ae^t + 2Be^t + Bte^t.$$
Подставим найденные производные в исходное уравнение
$$2At^2 e^t + 8Ate^t + 4Ae^t + 4Be^t + 2Bte^t - 4Ate^t - 2At^2 e^t - 2Be^t - 2Bte^t$$
$$- 4Ate^t + 4Ae^t + 2Be^t = (t+1)e^t.$$
Откуда $A = \frac{1}{4}, \qquad B = 0.$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид
$$x_{\text{ч.н}} = \frac{1}{4} t^2 e^t.$$
А его общее решение
$$x(t) = x_{\text{о.о}} + x_{\text{ч.н}}, \qquad x(t) = C_1 + C_2 e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t .$$
Теперь используем начальные условия задачи и получаем систему алгебраических уравнений для определения C
$$x(0) = C_1 + C_2 = \frac{1}{2},$$
$$x'(0) = C_2 = \frac{1}{2}.$$
Откуда $\mathrm{C}_1 = 0, \quad \mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}.$

Таким образом, решением будет
$$x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t.$$

Решая данную задачу двумя методами, а именно классическим и операционным, можно заметить, что операционным методом решение сводится к более легкой для вычисления модели и быстрее приводит к результату. Таким образом, можно сделать вывод, что операционный метод дает нам видимое преимущество перед классическим методом при решении задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что необходимо в решении более сложных задач.