Построение асимптотического решения для одного уравнения в частных производных в области с негладкой границей

Ю.В. Тиунова, И.В. Захарова

Описывая процесс, который происходит в реальном мире с помощью математической модели, приходится учитывать различные малые факторы. Это приводит к появлению в уравнении дополнительных членов с малыми множителями, которые называются возмущениями. Возмущения условно делятся на регулярные и сингулярные. Сингулярные возмущения в отличие от регулярных, хотя и являются малыми в каком-то смысле, вызывают существенные изменения решения.

В работе рассматривается сингулярно возмущенная задача для уравнения в частных производных эллиптического типа в прямоугольнике $(x,y)\in D=(0<x<2)\times(0<y<2)$ – область с негладкой границей с четырьмя угловыми точками:

$$\varepsilon^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right)-U=x, \tag{1}$$

$$U(0,y)=0,\ U(x,0)=0,\ U(2,y)=0,\ U(x,2)=0. \tag{2}$$

Если граница области не является гладкой, а содержит угловые точки, то погранслойная структура решений сингулярно возмущенных задач существенно усложняется в окрестности таких точек.

Следуя работе [1], асимптотическое разложение решения будем строить в виде: $U=\overline{U}+\Pi+\mathrm{P}$.

Здесь $\overline{U}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overline{U}_k(x,y)$ – регулярная часть асимптотики. Буквой Π обозначены пограничные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника D, а буквой P– угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника.

В соответствии с числом сторон прямоугольника, Π-функции состоят из четырех слагаемых:

$$\Pi=\overset{(1)}{\Pi}+\overset{(2)}{\Pi}+\overset{(3)}{\Pi}+\overset{(4)}{\Pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta)+\overset{(2)}{\Pi}_k(\xi,y)+\overset{(3)}{\Pi}_k(x,\eta^*)+\overset{(4)}{\Pi}_k(\xi^*,y)\right),$$

где $\eta=\dfrac{y}{\varepsilon}$, $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta^*=\dfrac{2-y}{\varepsilon}$, $\xi^*=\dfrac{2-x}{\varepsilon}$ – погранслойные переменные.

В работе однозначно определены коэффициенты $\overline{U}_k(x,y)$ регулярной части асимптотики, как решения алгебраических уравнений. В частности, $\overline{U}_0=-x$.

Для определения коэффициентов $\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta)$, $\overset{(2)}{\Pi}_k(\xi,y)$, $\overset{(3)}{\Pi}_k(x,\eta^*)$, $\overset{(4)}{\Pi}_k(\xi^*,y)$ получены и решены задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими условиями. Условия задаются таким образом, чтобы устранить невязку, которую вносят регулярные члены асимптотики. В частности, $\overset{(1)}{\Pi}_0(x,\eta)=xe^{-\eta}$, $\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,y)=0$, $\overset{(3)}{\Pi}_0(x,\eta^*)=xe^{-\eta^*}$, $\overset{(4)}{\Pi}_0(\xi^*,y)=2e^{-\xi^*}$.

Решение задачи (1), (2), составленное из главных членов асимптотик регулярной части и четырех пограничных функций, изображено на рисунке 1.

На рисунке 1 мы видим существенный «всплеск» построенной поверхности в окрестности угловых точек (2;0) и (2;2). Это происходит из-за того, что пограничные функции $\overset{(1)}{\Pi}$, $\overset{(2)}{\Pi}$, $\overset{(3)}{\Pi}$, $\overset{(4)}{\Pi}$, устраняя невязку в граничном условии на одной стороне, в свою очередь вносят дополнительные невязки в граничные условия на других сторонах. Так функция $\overset{(4)}{\Pi}(\xi^*, y)$ устраняя невязку в граничном условии на стороне $x=2$, вносит невязки в граничных условиях $y=0$, $y=2$. Для устранения этих невязок вводятся угловые пограничные функции, в соответствии с числом вершин. Угловые пограничные функции существенны в близи угловых точек, а далее с ростом переменных экспоненциально затухают.

$$\mathrm{P} = \overset{(1)}{\mathrm{P}} + \overset{(2)}{\mathrm{P}} + \overset{(3)}{\mathrm{P}} + \overset{(4)}{\mathrm{P}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\overset{(1)}{\mathrm{P}}_k(\xi,\eta) + \overset{(2)}{\mathrm{P}}_k(\xi,\eta^*) + \overset{(3)}{\mathrm{P}}_k(\xi^*,\eta) + \overset{(4)}{\mathrm{P}}_k(\xi^*,\eta^*) \right).$$

Для определения коэффициентов $\overset{(1)}{\mathrm{P}}_k(\xi,\eta)$, $\overset{(2)}{\mathrm{P}}_k(\xi,\eta^*)$, $\overset{(3)}{\mathrm{P}}_k(\xi^*,\eta)$, $\overset{(4)}{\mathrm{P}}_k(\xi^*,\eta^*)$ получены задачи для уравнений с частными производными и соответствующими условиями. В частности, $\overset{(1)}{\mathrm{P}}_0(\xi,\eta)=0$, $\overset{(2)}{\mathrm{P}}_0(\xi,\eta^*)=0$, $\overset{(3)}{\mathrm{P}}_0(\xi^*,\eta)=-2e^{-(\xi^*+\eta)}$, $\overset{(4)}{\mathrm{P}}_0(\xi^*,\eta^*)=-2e^{-(\xi^*+\eta^*)}$.

На рисунке 2 показано решение задачи (1), (2) составленное из главных членов асимптотик пограничных функций и угловой пограничной функции $\overset{(3)}{\mathrm{P}}_0(\xi^*,\eta)$. Мы видим существенные изменения поверхности , произошедшие из-за влияния функции $\overset{(3)}{\mathrm{P}}_0(\xi^*,\eta)$.

На рисунке 3 показано решение задачи (1), (2) составленное из главных членов асимптотик пограничных функций и всех угловых пограничных функций.

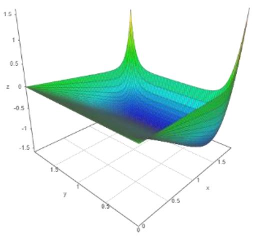

Рис.1

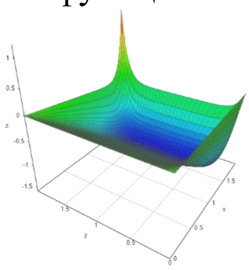

Рис.2

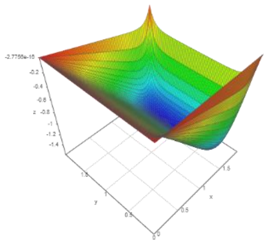

Рис.3

Литература

Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Науч.-теор. пособие / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.: ил. (Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики)