Несобственные интегралы 1-го рода

Л.О. Трапезникова М.В. Фалалеев

Определённый интеграл называется несобственным интегралом 1-го рода, если область интегрирования является бесконечной. Обозначается такой интеграл следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to+\infty\\ A''\to-\infty}}\int_{A''}^{A'} f(x)dx$$

В чём заключается геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода? Пусть дан интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Он выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, заключенной между линиями *y=f(x), x=a* и осью абсцисс.

Каким образом можно посчитать несобственный интеграл 1-го рода? Для того чтобы вычислить такой интеграл нужно использовать предел определенного интеграла. Приведём пример, нам нужно посчитать несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = -\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}(e^{-b}-e^0) = -\lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{e^b}-1) = 1.$$

Выделяют два вида несобственных интегралов: сходящиеся и расходящиеся.

Пусть существует конечный предел

$$A = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$$

Тогда говорят, что несобственный интеграл 1-го рода является сходящимся. Если предела не существует или он равен $\pm\infty$, то несобственный интеграл 1-го рода является расходящимся.

Приведём примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{1}{x}dx = \lim_{B\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^B =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} (\ln B - \ln 1) = +\infty$$

Данный интеграл является расходящимся.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} = \lim_{B \to +\infty} (-\frac{1}{x}) \Big|_1^B =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} (\frac{-1}{B} + 1) = 1$$

Данный интеграл является сходящимся.

Сходящиеся несобственные интегралы 1-го рода обладают всеми свойствами обычных определенных интегралов.