Сравнение задач о случайном блуждании с поглощающим и отражающим экраном.

Е. И. Малахов.

Задачи о случайных блужданиях встречаются в теории систем массового обслуживания и систем управления запасами, в биологии (процессы рождения и гибели) и т.д.

Имеется частица, совершающая блуждания по целочисленным точкам прямой. Перемещение начинается в точке $x = 0$ и может происходить как по всей прямой, так и на некотором ограниченном отрезке. В последнем случае говорят о границах (экранах), поставленных на пути движения частицы. В этой статье рассмотрены два вида экранов: поглощающий и отражающий. Если частица попадает на **поглощающий** экран, то на этом ее движение заканчивается. Если частица достигает **отражающего** экрана, то в следующий момент времени она может продолжить движение только в противоположную от экрана сторону.

Стоит отметить, что в силу симметричности случайных блужданий относительно точки старта, будем рассматривать случаи установки поглощающих и отражающих экранов в точках прямой с отрицательными значениями x. Оба экрана ограничивают движение частицы и уменьшают общее количество траекторий. Более того, во время исследований, эмпирически были выявлены закономерности, возникающие при установке этих экранов. Оказалось, что количество траекторий полностью совпадает при установленном поглощающем экране в точке x и отражающим экраном в точке $(x + 1), при\ x + 1 \leq 0$ (на единицу ближе к точке начала блужданий $x = 0$). Это так, потому что при поглощающем экране последняя точка, в которой частица может отразиться - это точка $(x + 1)$. С другой стороны, ничто не влияет на число траекторий слева от отражающего экрана, как если бы там находился поглощающий экран. Это означает, что для таких типов задач возможно применение одинаковых методов.

Случай, когда поглощающий экран находится в точке $x = -1$ хорошо известен. Частица, выходящая из точки $x = 0$, совершает случайные блуждания на полупрямой $[0, \infty)$. Перемещение осуществляется скачками в дискретный момент времени. В результате каждого скачка [шага], частица перемещается вправо или влево. В точке $x = -1$ установлен поглощающий экран. Изучается количество допустимых траекторий до поглощения за заданное число шагов N.

Допустимой является траектория ведущая в поглощающий экран, при перемещении по которой частица попадает в экран только на N-ом шаге.

В результате решения этой задачи оказывается, что количество допустимых траекторий, ведущих в поглощающий экран за заданной число шагов образуют последовательность чисел Каталана

$$C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \text{где } C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}, 2n = N - 1.$$

Если в этой задаче заменить поглощающий экран на отражающий на единицу правее, то количество траекторий, приводящих в отражающий экран будет тем же и вычисляться по тем же формулам. Значения из точки $x + 1$ переносятся в точку x без изменений.

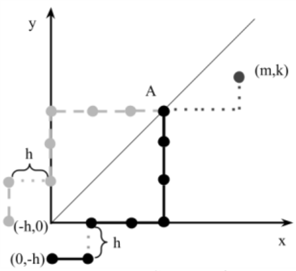

Рис. Смещение h

Применим метод отражений. Для начала рассмотрим недопустимую траекторию из точки $(0, -1)$ в (m, k). Здесь $N = m + k$, где m – число шагов от экрана, k – в обратную сторону. При отражении относительно прямой $y = x$ (поглощающего экрана) отрезок от А до (m, k) остается неизменным. Значит, неважно, где закончится блуждание частицы. Отражается как раз отрезок от (0,-1) до точки А. Воспользовавшись методом отражений, получим число траекторий, ведущих в точку (m, k) при поглощающем экране находящемся в точке $x = -1$ или отражающего в точке $x = 0$. Оно равняется $C_N^k - C_N^{k-1}$.

При перемещении частицы до первого касания экрана в точке А, число шагов к экрану k равно числу шагов от экрана m минус смещение h - точка установки поглощающего экрана. А после отражения соотношение меняется на $k = m + h$. Значит, число траекторий, ведущих в точку (m, k) при установленном поглощающем экране в точке h, равняется $C_N^k - C_N^{k+h}$.

Число траекторий, ведущих в поглощающий экран, установленный в любой точке, за заданное число шагов вычисляется по формуле

$$C_N = C_{2k+h-1}^k - C_{2k+h-1}^{k+h} = \frac{h}{k+h} C_{2k+h-1}^k = \frac{h}{2k+h} C_{2k+h}^k \ [1].$$

Литература

1. Малахов Е. И./ Случайные блуждания на полупрямой с поглощающим или отражающим экраном/ url:
http://math.isu.ru/ru/chairs/tpdm/docs/Platonovskie2020/Malahov-article.pdf