МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Г. А. Ботоян, А. В. Аргучинцев

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее аргумент, функцию и производные от этой функции; аналогично вводится понятие системы дифференциальных уравнений. Однако вслед за этим делается ограничение, которое часто в явном виде даже не высказывается: именно, рассматриваются только такие дифференциальные уравнения, в которых функции и их производные берутся при одном и том же значении аргумента, т. е. уравнение вида:

$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0$. (1)

Но возможно рассматривать и более широкий класс дифференциальных уравнений, именно таких, в которых участвующие функции и их производные берутся, вообще говоря, при различных значениях аргумента. Основной задачей работы является рассмотрение данных типов дифференциальных уравнений, а также изучение методов их решения.

Что такое дифференциальные уравнения с запаздыванием?

Дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом называется дифференциально-разностное уравнение, в котором производная наивысшего порядка от неизвестной функции имеет аргумент, не меньший, чем все аргументы неизвестной функции и её производных, входящих в уравнение.

Например:

$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))), \tau(t) \geq 0$

$x''(t) = f(t, x(t), x(t-\tau 1), x(t-\tau 2), x'(t), x'(t-\tau 1), x'(t-\tau 2))$, где $\tau 1>0, \tau 2>0$

Методы решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Рассмотрим три метода решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

- Метод последовательного интегрирования
- Метод последовательных приближений
- Метод разложения неизвестной функции по степеням запаздывания

Метод последовательного интегрирования

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$x'(t) = f(t, x(t), x[t-\tau])$, где $\tau > 0$, $x(t) = \phi_0(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$

Наиболее естественным методом решения этого уравнения является так называемый метод последовательного интегрирования, или метод шагов при котором непрерывное решение x(t) определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания:

$x'(t) = f(t, x(t), \phi_0\ [t-\tau])$ при $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, $x(t_0) = \phi_0(t_0 - 0)$
$x'(t) = f(t, x(t), \phi_1\ [t-\tau])$ при $t_0 + \tau \le t \le t_0 + 2\tau$, $x(t_0+\tau) = \phi_1(t_0 + \tau - 0)$
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
$x'(t) = f(t, x(t), \phi_n\ [t-\tau])$ при $t_0 + n\tau \le t \le t_0 + (n+1)*\tau$, $x(t_0+n\tau) = \phi_n(t_0 + n\tau - 0)$

Где $\phi_n(t)$ – решение исходного уравнения на интервале

$t_0 + (I-1)*\tau \le t \le t_0 + n\tau$

Этим методом доказывается существование решения, если функции f и ϕ_0 непрерывны, и его единственность, если функция f удовлетворяет одному из условий, обеспечивающему единственность решения уравнений

Метод последовательных приближений

В применении к дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом

$x'(t) = f(t, x(t), x[t - \tau(t)])$, где $\tau > 0$, $x(t) = \phi(t)$ на E_{t0}

или к эквивалентному интегральному уравнению

$$x(t) = \phi(t_0) + \int_{t0}^{t} f\left(t, x(t), x\left[t - \tau(t)\right]\right) dt$$

с тем же начальным условием метод последовательных приближений заключается в том, что, исходя из произвольной непрерывной, удовлетворяющей начальным условиям функции

$x(t) = x_0(t)$, строят последовательность приближений

$$x_n(t) = \phi(t_0) + \int_{t0}^{t} f\left(t, x_{n-1}(t), x_{n-1}\left[t - \tau(t)\right]\right) dt$$

Равномерная сходимость приближений x(t) к решению и единственность этого решения легко может быть доказана непосредственно, если предположить, что f и ϕ непрерывны и f удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам.

Оценка погрешности при применении метода последовательных приближений может быть без труда получена методами, применяющимися к обыкновенным уравнениям без запаздывания. Метод последовательных приближений достаточно редко употребляется в практике, а чаще комбинируется с интерполяционными методами.

Метод разложения неизвестной функции с запаздывающим аргументом по степеням запаздывания

Пусть дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом (3) разрешено относительно функции $x(t-\tau)$

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x\left[t - \tau\right]\right),\ x(t) = \varphi(t) \quad (3)$$

Если при малом запаздывании τ разложить функцию $x(t-\tau)$ в ряд Тейлора вокруг значения $t_0=0$

$$x(t-\tau) = x(t) - x'(t)\,\tau + \frac{x'(t)\cdot\tau^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{(n)}(t)}{n!}\tau^n$$

то вместо (3) будем иметь уравнение:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(t) - \tau x'(t) + \ldots + \frac{(-1)^m \tau^m}{m!} x(m)(t)\right)$$

Исследования показали, что довольно хорошие результаты можно получить, если ограничиваться двумя членами разложения, (т.е. m=1)

Пример. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом

$x''(t) - x'(t) + x(t) - x(t - ½) = 0$

Решение: Разложим функцию x(t-1/2) формуле Маклорена, ограничиваясь двумя членами разложения.

$x(t - 1/2) = x(t) - ½\, x'(t)$

Тогда уравнение примет вид:

$x''(t) - ½x'(t) = 0$

Получаем линейное однородное ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами без запаздывания

$X_{об} = C1 + C2e^{1/2t}$