ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА В ВОДОТОКЕ

Е. С. Чупина

В работе рассматривается задача о преодолении пловцом водной преграды. Река с постоянными шириной и течением. Пловец, который намерен переплыть реку по кратчайшему направлению (попасть в ближайшую точку на противоположном берегу). Он имеет постоянную собственную скорость. Пловец плывет так, что его вектор скорости постоянно направлен в целевую точку (0,0). Пловец начинает свой путь из точки с координатами (0,L) (рис. 1а).

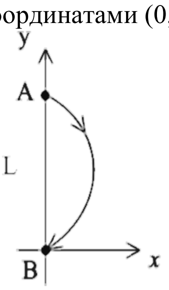

Рис.1а.

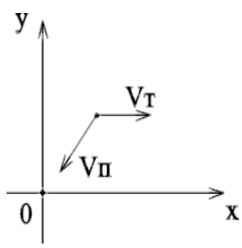

Рис.1б.

Требуется: Определить траекторию движения Пловца.

Для построения математической модели рассмотрим рис.2б.

Здесь L – это ширина реки, $\overrightarrow{V_П}$ – вектор скорости пловца, $\overrightarrow{V_T}$ – вектор скорости течения. $\overrightarrow{V_П} \uparrow\uparrow \{-x,-y\}$, $\left|\overrightarrow{V_П}\right| = V_П$, $\overrightarrow{V_T} = \{0, V_T\}$, $\left|\overrightarrow{V_T}\right| = V_{T.}$ Можно убедиться, что вектор $\overrightarrow{V_П}$, удовлетворяющий указанным требованиям, имеет координаты $\overrightarrow{V_П} = \left\{-\frac{xV_П}{\sqrt{x^2+y^2}}; -\frac{yV_П}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$. Таким образом, имеем следующее уравнение движения: $\frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \overrightarrow{V_П} + \overrightarrow{V_T}$, где dt – дифференциал от времени. Если расписать его покоординатно, получим математическая модель, которая имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнении с начальными данными, т.е. задачу Коши [1].

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{xV_{\Pi}}{\sqrt{x^2+y^2}} + V_T, \frac{dx}{dt} = -\frac{yV_{\Pi}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ x(0)=0, y(0)=L. \tag{1}$$

Решаем полученную задачу Коши. Перейдем в полярную систему координат [2] и преобразуем систему к задаче Коши для одного уравнения, исключив переменную t

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{(V_{\Pi} - V_T\cos\varphi) - r}{V_T sin\varphi}, r(0) = L. \tag{2}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2) и получим траекторию движения пловца в виде функции $r = \dfrac{L\left(tg\dfrac{\varphi}{2}\right)^{\alpha}}{sin\varphi}$ где $\alpha = \dfrac{V_{\Pi}}{V_T}$.

Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 3.

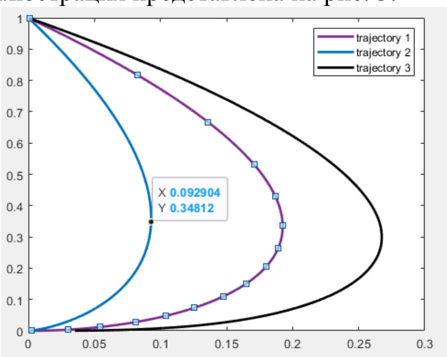

Рис.3.

На рис.3 видно, что траектория его не симметрична, а наиболее удаленная точка расположена ближе к дальнему берегу.

Литература

1. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 288 с.
2. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 7-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 224 с.