Преобразование Лапласа и его применение.

М. А. Комов, М. В. Фалалеев

Преобразование Лапласа - интегральное преобразование, связывающее функцию F(s) комплексного переменного (изображение) с функцией f(x) вещественного переменного (оригинал). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

Что такое оригинал функций?

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1. $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;
2. для всех отрицательных t $f(t)$=0;
3. $|f(t)|$ возрастает при $t\to+\infty$ не быстрее показательной функции, т.е существуют такие постоянные M>0 и s, что для всех t $|f(t)|\leq Me$^st.

Нахождения изображения.

Изображение функций называется $\mathrm{F(p)} = \int_0^{+\infty} \mathrm{f(t)e^{(-pt)}dt}$.

Пример. Найдем изображение функции $\mathrm{f(t) = te^t}$.

$\mathrm{F(p)} = \int_0^{+\infty} \mathrm{te^{(-pt+t)}}$=$\int_0^{+\infty} \mathrm{te^{(1-p)t}dt}$=$\frac{\mathrm{te^{(1-p)t}}}{1-\mathrm{p}}\Big|\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e^{(1-p)t}}}{(1-\mathrm{p})^2}\mathrm{d}\big((1-\mathrm{p})\mathrm{t}\big) - = = - \frac{\mathrm{e^{(1-p)t}}}{(1-\mathrm{p})^2}\Big|\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix} = \frac{1}{(1-\mathrm{p})^2}$

Изображение функции $\mathrm{f(t) = te^t}$ найдено $\mathrm{te^t} \leftrightarrow \frac{1}{(1-\mathrm{p})^2}$

Нахождение производной изображения.

Восстановление изображения функции по производной оригинала.

Известно, что для функций $\mathrm{f(t), f'(t), \dots , f^{(n)}(t)}$ изображениями являются:

$\mathrm{f(t) \leftrightarrow F(p)}$,

$$\mathrm{f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)},$$

$$\mathrm{f^{(2)}(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots...$$

$$\mathrm{f^{(n)}t \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)},$$

где под $\mathrm{f^{(k)}(0)}$ $(\mathrm{k} = 0,1,2,3, \dots , \mathrm{n}-1)$ понимается $\lim\limits_{\mathrm{t}\to+0} \mathrm{f^{(k)}(t)}$.

Пример. Найдем изображение функции $\mathrm{f(t)} = \cos^2 \mathrm{t}$.

Воспользуемся описанным методом:

$$\mathrm{f'(t) \leftrightarrow p\,F(p) - f(0)}, \quad -\sin(2\mathrm{t}) \leftrightarrow \mathrm{pF(p)} - 1.$$

Поскольку

$$f^{(2)}(t) \leftrightarrow p^2\,F(p) - pf(0) - f'(0),$$

то

$$-2\cos(2t) \ \leftrightarrow p^2F(p) - p - 0.$$

Так как

$$-2\cos(2t) \leftrightarrow -\frac{2p}{p^2+4},$$

то отсюда получаем

$$-\frac{2p}{p^2+4} = p^2F(p) - p, \quad -\frac{2p}{p^2+4} + p = p^2F(p),$$

$$\frac{p(p^2+2)}{p^2+4} = p^2F(p), \quad \frac{p^2+2}{(p^2+4)p} = F(p).$$

Итак, изображением функции $\cos^2(t)$ является $\frac{p^2+2}{(p^2+4)p}$.

Нахождение производной изображения.

Восстановление изображения функции по производной изображения.

$$F'(p) \leftrightarrow -tf(t),$$

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-t)^n f(t).$$

Пример.

Найдем изображение функции $f(t) = t^2\cos t$.

Поскольку $\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}$,

то

$$t^2\ \cos t \leftrightarrow F^{(2)}(p).$$

Таким образом

$$F'(p) = \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}, \quad t^2\cos t \leftrightarrow F^{(2)}(p) = \frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}\ .$$

Изображение функции найдена $f(t) = t^2\ \cos t$.

Правила свертки.

Восстановление изображения функции по теореме умножения (теорема о свертке).

По теореме о умножения изображений

$$F(p)G(p) \leftrightarrow \int_0^t f(u)g(t-u)du = f(t) * g(t),$$

здесь

$$f(u) \leftrightarrow F(p), g(u) \leftrightarrow G(p).$$

Интеграл в правой части называется свёрткой функций $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается $f(t) * g(t)$.

Пример.

Найдем изображение функции $\int_0^t e^{t-u} \sin u \, du$.

Разложим её на две функции $f(u)$ и $g(t-u)$

$$f(u) = \sin u \text{ и } g(t-u) = e^{t-u}.$$

Так как

$\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$,

$$e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1},$$

то по теореме о свертках

$$\int_0^t e^{t-u} \sin u \, du \leftrightarrow \frac{1}{(p^2+1)(p-1)}.$$

Решения задач.

В монографии Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с. На с. 116 приведена следующая задача:

$$\begin{cases} Lk'' + Sk = e(t) \\ \quad Lk'' - e_0 = 0 \end{cases},$$

с начальными условиями: $k(0) = 0$, $k'(0) = 0$, $e_0(0+) = e(0+), \dot{e_0}(0+) == \dot{} e(0+)$,

где $k(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$ контур тока, $e(t)$ подаваемое напряжение, $e_0(t)$ − получаемо напряжение, L − индуктивность, $S = \frac{1}{C}$ − обратная ёмкость.

Данная система уравнений представима в следующем векторно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k'' \\ e_0'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ e_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозначения для системы

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k'' \\ e_0'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ e_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \end{pmatrix}:$$

$$A = \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} L & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} k(t) \\ e_0(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Be^{(1)} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix} e^{(1)} = 0, \quad e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^*e^* = \begin{pmatrix} L & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^* = 0, \; e^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Ae^{(1)} = \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z, \quad A^*e^* = \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma,$$

$$\widehat{B} = B + \langle *, \gamma \rangle z,$$

$$\widehat{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ L + S & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = B_1^{-1} = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(L+S) & L \end{pmatrix}, \quad A\Gamma = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} -S & 0 \\ -(L+S) & L \end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование Лапласа к исходной системе уравнений, найдём её изображение:

$$(p^2B - A)x(p) = g(p) + Bpx(0) + Bx'(0)$$

$$(p^2B - A)^{-1} = \Gamma \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^l}{p^{2l+2}} \left(I - \langle *, e^* \rangle Ae^{(1)}\right) - \langle *, e^* \rangle e^{(1)} p^{-1},$$

$$\mathrm{I}-\langle *,\mathrm{e}^{*}\rangle \mathrm{A}\mathrm{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \langle *,\mathrm{e}^{*}\rangle \mathrm{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{x}(\mathrm{p}) = (\mathrm{p}^2\mathrm{B}-\mathrm{A})^{-1}\big(\mathrm{g}(\mathrm{p})+\mathrm{Bpx}(0)+\mathrm{Bx}'(0)\big).$$

Возвращаясь в пространство оригиналов, и получим окончательный вид систем уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathrm{k}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{e}_0(\mathrm{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{S}}}\,\mathrm{ish}\left(\sqrt{\dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{L}}}\,\mathrm{ti}\right)}{\mathrm{L}} * \mathrm{e}(\mathrm{t}) \\ \dfrac{\mathrm{S}\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{S}}}\,\mathrm{ish}\left(\sqrt{\dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{L}}}\,\mathrm{ti}\right)}{\mathrm{L}} * \mathrm{e}(\mathrm{t}) + \mathrm{e}(\mathrm{t}) \end{pmatrix} \theta(\mathrm{t}).$$

Литература

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление, теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2003. 176 с.
2. В.Е. Гозбенко Методы управление динамикой механических систем на основе вибрационных полей и инерционных связей. М.: Машиностроение-1, 2004. 368 с.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.