# МЕТОДЫ И ПРОБЛЕМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

*М. А. Скурыгина, С. М. Кривель*

Имеется функциональная зависимость $f$ между величинами $y$ и $x_0, x_1, \dots, x_k$, заданная таблично:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x_0}$ | $x_{00}$ | $x_{01}$ | … | $x_{0m}$ |
| $\boldsymbol{x_1}$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | … | $x_{1m}$ |
| **…** | … | … | … | … |
| $\boldsymbol{x_k}$ | $x_{k0}$ | $x_{k1}$ | … | $x_{km}$ |
| $\boldsymbol{y}$ | $y_0$ | $y_1$ | … | $y_m$ |

Точки, расположенные в столбцах таблицы, называются *узловыми*.

Требуется приблизить функцию $f$, то есть отыскать другую такую функцию $g$, которая давала бы приближённое представление функции $f$ и имела наименьшее отклонение в узловых точках

$\varphi_j(\alpha) = |g_j - f_j| \to 0$, j=$\overline{0, m}$.

Такая задача называется *аппроксимацией*. *Интерполяцией* называют частный случай аппроксимации, при котором приближающая функция проходит точно через заданные узловые точки.

Поскольку аналитически вид зависимости исходной функции неизвестен, приближающая функция имеет вид $g(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$, где $x$ – аргумент функции, $a_0, a_1, \dots, a_n$ – параметры (коэффициенты), $n \le m$. В связи с тем, что функция $g$ в процессе решения задачи приближения и последующего анализа результатов подвергается различным действиям и преобразованиям, таким как решение систем уравнений или нахождение производной, приближающую функцию удобнее искать в виде алгебраического многочлена невысокого порядка:

$g(x, a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{-1} + a_nx^n$.

Интерполяция функции $f$ по заданному регулярному массиву узлов осуществляется по общей формуле *интерполяционного многочлена Лагранжа*

$$g(x, y) = L_{km}(x, y) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} z_{ij} \prod_{\substack{p=0,\\ p\neq i}}^{k} \prod_{\substack{q=0,\\ q\neq j}}^{m} \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)}$$

сначала по строкам таблицы, затем по её столбцам.

Преимущество Лагранжевой интерполяции заключается в возможности брать по каждой переменной своё количество узлов из массива, однако увеличивается степень результирующего интерполирующего многочлена. При увеличении числа узлов возникает необходимость полного пересчёта многочлена, также вызывает затруднение построение интерполяционных многочленов для большого количества известных узловых точек за счёт громоздкости вычислений.

Вышеописанных трудностей при интерполяции позволяет избежать метод *сплайн-интерполяции* (кусочно-полиномиальной). Заданный массив узлов на регулярной сетке разбивается на ячейки

$$\Delta_{ij} = \Delta(x_i, y_j), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,m},$$

на каждой из которых строится интерполяционный многочлен степени не выше третьей с учётом условий непрерывности и гладкости в узловых точках.

В связи с тем, что набор большого числа узлов не позволяет строить интерполяционные многочлены без высокой вычислительной нагрузки и скачков функции, в таких случаях используются методы аппроксимации.

Сформулируем простейшую задачу многомерной аппроксимации *методом наименьших суммарных отклонений* на примере трёхмерного пространства. Суть НСО-аппроксимации заключается в построении для заданного в пространстве множества точек такой гиперплоскости $y=a_2x_0+a_1x_1+a_0$, чтобы сумма модулей отклонений

$$\varphi_j(\alpha) = y_j - (a_2x_{0j} + a_1y_{1j} + a_0)$$

была минимальной, то есть

$$\sum_{j=0}^{m} |\varphi_j(\alpha)| = min.$$

Метод основывается на перенесении в пространство параметров $\varphi = (a_0, a_1, a_2)$ и их нахождении.

Аппроксимация *методом наименьших квадратов* заданного в трёхмерном пространстве набора узловых точек подразумевает построение гиперплоскости $y=a_2x_0+a_1x_1+a_0$ такой, чтобы сумма квадратов расстояний от узлов до неё

$$\varphi(\alpha) = \sum_{j=0}^{m} (y_j - (a_2x_{0j} + a_1y_{1j} + a_0))^2$$

была минимальна, иначе говоря, необходимо найти такие коэффициенты линейной зависимости, при которых значение функции $\varphi(\alpha)$ будет наименьшим.

Методы наилучших приближений весьма удобны для аппроксимации данных массива, полученных экспериментально с большой погрешностью, однако, если исходная приближаемая функция имеет выбросы, рассмотренными способами не получится отразить изгибов поверхности, на которые указывают скачки значений.

Таким образом, приведённые методы приближения функций удобны для разных отдельных случаев в зависимости от того, как представлена функция $f$, какие функции используются для приближения и какому условию должно удовлетворять отклонение приближающей функции $g$.