

Методы решения задач динамики движения летательных аппаратов

Л.О. Трапезникова, С.М. Кривель

В наше время для изучения какого-либо физического процесса, природного явления или работы машины сначала необходимо выяснить, какие величины характеризуют эти явления, а затем построить между этими величинами всевозможные связи. Как правило, математически эти связи можно описать с помощью алгебраических или дифференциальных уравнений. Получив решения соответствующих уравнений, мы можем выяснить, как с течением времени будет развиваться и изменяться данный процесс.

В рамках данной научной работы изучаемым процессом будет динамика движения летательного аппарата. Определить движение летательного аппарата – это значит определить в определенный момент времени его положение в пространстве, скорость, угловые скорости вращения и множество других параметров.

Предположим, что из аэродинамики нам известны величины действующих на летательный аппарат аэродинамических сил и моментов, а из теории двигателей – величины тяги двигателей, а также некоторые необходимые характеристики летательного аппарата.

- 1) Сила тяги двигателей P ;
- 2) Масса ЛА m ;
- 3) Момент инерции I_z ;
- 4) Плотность воздуха ρ ;
- 5) Ускорение свободного падения g ;
- 6) Площадь обтекаемого тела S ;
- 7) Линейный размер обтекаемого тела b_a ;

Поставим задачу определить характеристики движения летательного аппарата, такие как: координаты, скорость, угол наклона траектории, угол атаки, угловая скорость вращения.

Для анализа и расчета движения летательного аппарата необходимо составить соответствующую систему уравнений в заданной системе координат.

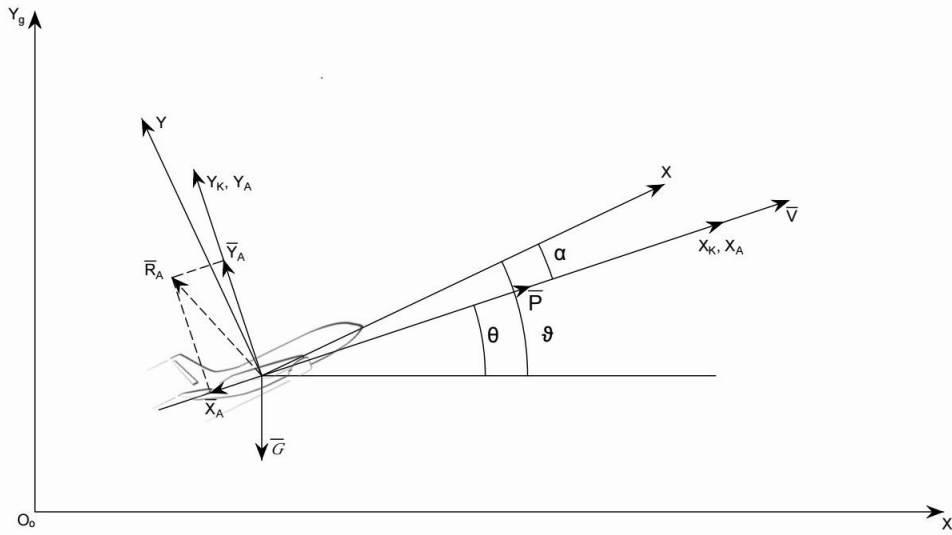
Для оценки летных характеристик удобно использовать следующие системы координат:

- *нормальную земную* $O_o X_g Y_g$, начало координат фиксировано в заданной точке на земной поверхности, ось $O_o X_g$ лежит в местной горизонтальной плоскости, ось $O_o Y_g$ направлена по местной вертикали вверх;

- *связанную* OXY , центр O помещен в центре масс ЛА, ось OX расположена в плоскости симметрии самолета и направлена вдоль корневой хорды крыла, ось OY расположена в плоскости симметрии перпендикулярно OX .

- *скоростную* $OX_A Y_A$ начало O помещено в центре масс самолета, ось OX_A совпадает с вектором скорости, OY_A лежит в плоскости симметрии ЛА, направлена к ее верхней части и перпендикулярна вектору скорости.

- *траекторную* $OX_k Y_k$ начало O помещено в центре масс самолета; ось OX_k направлена вдоль вектора земной скорости; ось OY_k лежит в плоскости местной вертикали, проходящей через вектор земной скорости;



Динамические уравнения

Первые два уравнения получены из закона об изменении количества движения и рассмотрены в траекторной системе координат. Третье уравнение системы характеризует вращение летательного аппарата в связанной системе координат.

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = P - X - G \sin \theta; \\ m \frac{d\theta}{dt} V = Y - G \cos \theta; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z. \end{cases}$$

Кинематические уравнения

Угол тангажа является суммой угла атаки и угла наклона траектории. Дифференцируя данное выражение и выразив производную угла атаки получим первое уравнение системы.

Проецируя скорость на оси земной системы координат, получим уравнения для нахождения координат летательного аппарата.

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - \frac{d\theta}{dt}; \\ \frac{dY_g}{dt} = V \sin \theta; \\ \frac{dX_g}{dt} = V \cos \theta. \end{cases}$$

Методы решения систем дифференциальных уравнений делятся на явные и неявные.

К явным методам относятся:

- 1) Явный метод Эйлера
- 2) Метод Эйлера-Коши
- 3) Модифицированный метод Эйлера
- 4) Методы Рунге-Кутты
- 5) Методы Адамса-Бэшфорта
- 6) Явные методы Хэмминга
- 7) Методы прогноза и коррекции

Среди явных нашли также широкое применение методы Фельберга, Ингланда, Ньюстрема, Милна, интерполяционные методы.

К неявным методам относятся

- 1) Неявный метод Эйлера
- 2) Метод трапеций
- 3) Методы Адамса-Мултона

Среди неявных также получили распространение методы Гира, Милна, Хемминга, Рунге-Кутты.

Наиболее популярными среди классических явных одношаговых методов являются *методы Рунге-Кутты*. Методы Эйлера, Эйлера-Коши и усовершенствованный метод Эйлера можно рассматривать как простейших представителей этого класса методов.

При решении системы дифференциальных уравнений одной из основных проблем является определение начальных условий.

Необходимо определить следующие начальные условия в момент времени $t = 0$ с :

- Скорость V_0
- Угол наклона траектории θ_0
- Угол атаки α_0
- Координаты Y_{g0}, X_{g0}
- Угловая скорость вращения ω_{z0}

Также исходя из начальных условия нам необходимо определить некоторые коэффициенты: $C_{xa}, C_{ya}, \delta_{в0}, m_z$

Предположим, что в начале движения ЛА летит горизонтально, прямолинейно и с постоянной скоростью. Из этого следует, что $V_0 = const$, $\theta_0 = 0$ рад. Значения Y_{g0}, X_{g0} будем считать равными 0 м. ω_{z0} также равна 0 рад/с. Для скорости зададим начальное значение $V_0 = 200 \frac{м}{с}$.

В распоряжении есть следующие расчетные формулы для определения коэффициентов:

$$X_a = C_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S \quad Y_a = C_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S \quad M_z = m_z \frac{\rho V^2}{2} S b_a$$

$$C_{xa} = AC_{ya}^2 \quad C_{ya} = C_{ya0} + C_y^\alpha \alpha \quad m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B$$

В момент времени $t = 0$ с летательный аппарат движется горизонтально, прямолинейно и с постоянной скоростью.

Из этого следует, что $V_0 = \text{const}$, $\theta_0 = 0$ рад. Значения Y_{g0}, X_{g0} будем считать равными 0 м. ω_{z0} также равна 0 рад/с.

Система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 0 = P - X; \\ 0 = Y - G; \\ 0 = M_z. \end{cases}$$

Используя формулы, приведенные ранее, находим начальное условие для угла атаки α и коэффициенты.

Так как начальные условия и необходимые коэффициенты найдены, приступим к решению системы. Систему дифференциальных уравнений решим в программе MATLAB с помощью решателя ode45, который осуществляет методы Рунге-Кутты. Также выведем графики для скорости, угла атаки, угла наклона траектории и угловой скорости вращения.

