МИНИМИЗАЦИЯ DC ФУНКЦИЙ НА ПРОСТЫХ МНОЖЕСТВАХ

И. А. Зайцев, А. С. Стрекаловский

В данной работе основным объектом изучения является невыпуклая задача минимизации в целевой DC функцией (представимой в виде разности двух выпуклых функций) на выпуклом множестве D вида

$$f(x) = g(x) - h(x) \downarrow \min, x \in D. \qquad (P)$$

Глобальное решение задачи (P) будем искать на основе следующего результата.

Теорема 1 ([1], [2]). Пусть $z \in D$ является глобальным решением задачи (P), тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \forall (y, \beta) : y \in D, \beta - h(y) = \zeta \triangleq f(z), \\ g(y) \leq \beta \leq \sup(g, D), \\ g(x) - \beta \geq <\nabla h(y), x - y>, \forall x \in D. \end{gathered}$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$\exists v \in D : f(v) > f(z) \triangleq \zeta,$$

то условия теоремы 1 становятся и достаточными для того, чтобы точка $z \in D$ была глобальным решением задачи (P). □

Глобальный поиск (ГП) в задаче (P) основан на приведённой теореме и описана в [1], [2]. При этом ГП состоит из двух этапов: а) локальный поиск, б) процедуры выхода из стационаров, основанные на теореме 1. Локальный поиск может состоять в решении серии задач, линеаризованных по базовой невыпуклости ($z^{k+1} = argmin(L_k, D)$):

$$L_k(x) = g(x) - <\nabla h(z^k), x> \downarrow min, x \in D. \qquad (PL_i)$$

Численный эксперимент производился на задаче минимизации квадратичной формы со знаконеопределённой матрицей F на выпуклом множестве D:

$$\begin{gathered} f(x) = <Fx, x> \downarrow \min, x \in D \subset \mathbb{R}^n, \\ D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq r, Ax \leq b\}. \qquad (PQ) \end{gathered}$$

Производится декомпозиция матрицы F на две положительно определённые невырожденные матрицы: $F = G - H$. Получаем соответствующее представление для функции $f(x)$:

$$f(x) = g(x) - h(x) = \,< Gx, x > \,- < Hx, x > \downarrow \min, x \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (PQ)$$

Для численного эксперимента производилась генерация тестовых задач при помощи специального метода [2]. Суть метода состоит в составлении N задач-ядер малой размерности с известным решением, «склеиванию» задач-ядер в одну задачу большей размерности по сепарабельности и применении преобразования к полученной задаче для избавления от сепарабельности.

Эксперимент начинается с выбора встроенного в Matlab метода выпуклого программирования для решения задач вида (PL_i):

$$g(x) \, - \, <\nabla h(x), x > \downarrow \min, x \in \, D \subset \mathbb{R}^n, \qquad (PCon)$$

Итог — метод последовательного квадратического программирования (SQP) быстрее решает данную задачу, чем другие методы *Matlab*.

Теперь используем специальный метод локального поиска [1], решая серию линеаризованный по базовой невыпуклости задач вида (PL_i). Для решения каждой вспомогательной задачи используем метод SQP, по результатам выбора для решения задач $(PCon)$.

Приводится решение исходной задачи (P), основанное на выходе из найденной стационарной точке при помощи алгоритма, описанного в [1]. Вспомогательные задачи решались методом SQP, так как именно он показал наилучшие результаты в подобных задачах (см. выше). Аппроксимация уровня выбиралась по формуле

$$A(\beta) = \{y^{2i-1} = \mu_i e^i, y^{2i} = -\mu_i e^i\}_{i=1}^n, \mu_i \in \, \mathbb{R} \, : \, < Hy^{2i}, y^{2i} > = \beta - \zeta.$$

Как результат, при помощи реализованного алгоритма удалось найти глобальное решение в квадратичной задаче (PQ), что не достигается при применении классических методов выпуклого программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Стрекаловский, Элементы невыпуклой оптимизации // Новосибирск: Наука, 2003;
2. А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов, Биматричные игры и билинейное программирование // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007;