ЗАДАЧА О ЗАПРЕТНОЙ ЗОНЕ

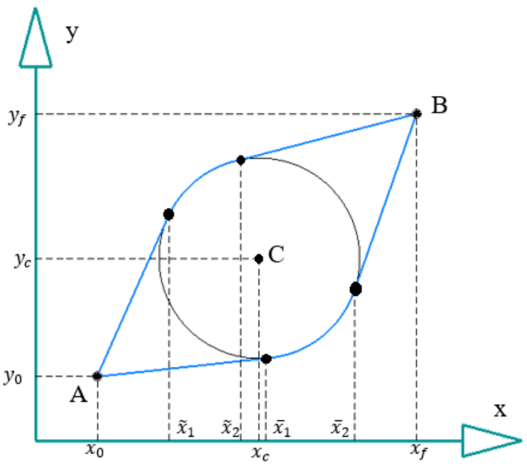
THE PROBLEM OF THE FORBIDDEN ZONE

Намаконов Алексей Юрьевич

Ключевые слова: вариационное исчисление; задача о запретной зоне; целевой функционал; уравнение Эйлера; усиленные условия Лежандра и Якоби

Вариационное исчисление является одной из интересных и актуальных областей решения прикладных проблем. Например, при решении логистических задач на транспорте и авиации возникают задачи о «запретной зоне», через которую проезжать нельзя. В качестве «запретной зоны» может выступать любое препятствие – гора, озеро, огневая точка.

Поставим задачу - найти траекторию движения самолета y = y(x) из точки A(x_0, y_0) в точку B(x_f, y_f), которая минимизирует путь и не может проходить через область S=$\{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < R^2\}$.



Таким образом, с математической точки зрения поставленная задача является задачей вариационного исчисления о минимизации целевого функционала:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx$$

с ограничениями на начальную и конечную точки пути:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_f) = y_f$$

и «запретную зону»: $x \notin S$.

Из решения уравнения Эйлера с учетом условий на «запретную зону» получаем две экстремали:

1) идет поверху, когда $y(x) \geq \varphi(x)$

$$y(x) = \begin{cases} \bar{C}_1 x + \bar{C}_2, & x \in [x_0; \bar{x}_1] \\ \varphi(x), & x \in [\bar{x}_1; \bar{x}_2] \\ \bar{\bar{C}}_1 x + \bar{\bar{C}}_2, & x \in [\bar{x}_2; x_f], \end{cases}$$

2) идет понизу, когда $y(x) \leq \varphi(x)$

$$y(x) = \begin{cases} \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2, & x \in [x_0; \tilde{x}_1] \\ \varphi(x), & x \in [\tilde{x}_1; \tilde{x}_2] \\ \hat{C}_1 x + \hat{C}_2, & x \in [\tilde{x}_2; x_f], \end{cases}$$

где $$\varphi(x) = y_c \pm \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}$$

$\bar{x}_1 = \dfrac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$	$\tilde{x}_1 = \dfrac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$
$\bar{x}_2 = \dfrac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$	$\tilde{x}_2 = \dfrac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$
$\bar{C}_1 = \dfrac{(x_c - \bar{x}_1)}{\sqrt{R^2 - (\bar{x}_1 - x_c)^2}}$	$\tilde{C}_1 = \dfrac{-(x_c - \tilde{x}_1)}{\sqrt{R^2 - (\tilde{x}_1 - x_c)^2}}$
$\bar{\bar{C}}_1 = \dfrac{(x_c - \bar{x}_2)}{\sqrt{R^2 - (\bar{x}_2 - x_c)^2}}$	$\hat{C}_1 = \dfrac{-(x_c - \tilde{x}_2)}{\sqrt{R^2 - (\tilde{x}_2 - x_c)^2}}$
$\bar{C}_2 = y_c + \sqrt{R^2 - (\bar{x}_1 - x_c)^2} - \frac{\bar{x}_1(x_c - \bar{x}_1)}{\sqrt{R^2 - (\bar{x}_1 - x_c)^2}}$	$\tilde{C}_2 = y_c - \sqrt{R^2 - (\tilde{x}_1 - x_c)^2} + \frac{\tilde{x}_1(x_c - \tilde{x}_1)}{\sqrt{R^2 - (\tilde{x}_1 - x_c)^2}}$
$\bar{\bar{C}}_2 = y_c + \sqrt{R^2 - (\bar{x}_2 - x_c)^2} - \frac{\bar{x}_2(x_c - \bar{x}_2)}{\sqrt{R^2 - (\bar{x}_2 - x_c)^2}}$	$\hat{C}_2 = y_c - \sqrt{R^2 - (\tilde{x}_2 - x_c)^2} + \frac{\tilde{x}_2(x_c - \tilde{x}_2)}{\sqrt{R^2 - (\tilde{x}_2 - x_c)^2}}$

Полученные экстремали удовлетворяют усиленным условиям Лежандра и Якоби и доставляют слабый локальный минимум целевому функционалу.