Описание и математическое моделирование движения плоского двухзвенного манипулятора с вращательнымипарами

Ю.А. Шапошников, С.В. Солодуша

Постановка задачи

Требуется рассмотреть три пункта:

1. Описание движения плоского двухзвенного манипулятора с вращательными парами;
2. Получение программного управляющего воздействия и движения;
3. Решение примера для заданных условий (компьютерная реализация ранее полученных выражений управления и движения двухзвенным манипулятором).

Математическая модель двухзвенного манипулятора с вращательными парами

Рассмотрим двухзвенный манипулятор, состоящий из двух абсолютно жестких звеньев C_1,C_2, соединённых шарниром O_2. Тело G_1 при помощи шарнира O_1 связано с неподвижным основанием. Система совершает движение в горизонтальной плоскости, перпендикулярной осям шарниров O_1 и O_2 .

Кинетическая энергия двухзвенного манипулятора равна

$$K=\frac{1}{2}(I_1+m_2L_1^2)\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}(I_2+m_2L_2^2)\dot{\varphi}_2^2+m_2L_1L_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2. \quad (1)$$

Уравнения движения рассматриваемого манипулятора в форме дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода имеют вид

$$\dot{x}_1=x_{2,}\;\; \dot{x}_2=u_1,\;\; \dot{x}_3=x_4,\;\; \dot{x}_4=u_{2,} \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$x_1=(I_1+m_2L_1^2)\varphi_{1,}x_2=(I_1+m_2L_1^2)\dot{\varphi}_{1,}x_3=(I_2+m_2L_2^2)\varphi_{2,}\;x_4=(I_2+m_2L_2^2)\dot{\varphi}_2,u_1=\mathrm{M}_1\text{-}\mathrm{M}_2,\;\; u_2=\mathrm{M}_2.$$

Пусть в некоторые фиксированные промежуточные моменты времени заданы неразделённые (нелокальные) многоточечные промежуточные условия

$$\sum_{k=1}^{m}F_kx(t_k)=\alpha. \quad (3)$$

Получение формул программного управляющего воздействия и движения

Система (2) многоточечным промежуточным условием (4) на промежутке времени $[t_{0,}T]$ является вполне управляемой. <u>Рассмотрим следующую задачу:</u> требуется найти программное управляющее воздействие $u=u(t)$, t∈$[t_0,T]$ и движение x=x(t), переводящее решение системы (2) из начального состояния x(t_0), обеспечивая удовлетворение неразделённым промежуточным условиям (3), в конечное состояние x(T).

Для решения задачи напишем решение уравнения (1.2), выходящее из начального из начального состояния x(t_0), и для моментов времени t=t_k, подставляя значения x$(t_к)$ в (1.4), получим следующие соотношения: $\sum_{k=1}^{m}F_kX\big[t_{k,}t_0\big]x(t_0)+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t_k}F_kX\big[t_{k,}\tau\big]\,Bu(\tau)d\tau=\alpha,$ а для конечного момента времени t=T будем иметь $x(T)$=X$[T,t_0]x(t_0)+\int_{t_0}^{T}X[T,\tau]\,Bu(\tau)d\tau.$

Имеем следующее интегральное соотношение: $\int_{t_0}^{T}H(t)u(t)dt=\eta\big(t_{0,\cdots,}T\big)$, где приняты обозначения: $H[t]=\begin{pmatrix}F(t)B\\X[T,t]B\end{pmatrix},\;\eta\big(t_{0,\cdots,}T\big)=\begin{pmatrix}\alpha-Fx(t_0)\\x(T)-X]x(t_0)\end{pmatrix},\quad F(t)=\sum_{k=1}^{m}F_k[t]=\sum_{k=1}^{m}F_kX[t_k,t],F\sum_{k=1}^{m}F_kX[t_k,t_0]=F(t_0),F_k[t]=\begin{cases}F_kX[t_k,t]\text{ при }t_0\le t\le t_{k,}\\0\quad\text{при }t_k<t\le t_{m+1}=T.\end{cases}$

Для того, чтобы система (2) с неразделённым многоточечным промежуточным условием (3) была вполне управляемой на отрезке $\big[t_{0,}T\big]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы H[t] были линейно независимы на этом отрезке.

В итоге получаем формулу для управляющего воздействия $u=u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} B^T((\sum_{k=1}^{m} F_k X[t_k,t])^T,\ (X[T,t])^T)Q^{-1}\eta + v(t), & t \in [t_0,t_1], \\ B^T((\sum_{k=2}^{m} F_k X[t_k,t])^T,\ (X[T,t])^T)Q^{-1}\eta + v(t), & t \in [t_1,t_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ B^T((F_m X[t_m,t])^T,\ (X[T,t])^T)Q^{-1}\eta + v(t), & t \in (t_{m-1},t_m], \\ B^T(0,\ (X[T,t])^T)Q^{-1}\eta + v(t), & t \in (t_m,T]. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя выражение управляющего воздействия (4) в (2) и интегрируя эти уравнения, получим формулу для описания движения на каждом промежутке времени.

Пример решения задачи для заданных условий

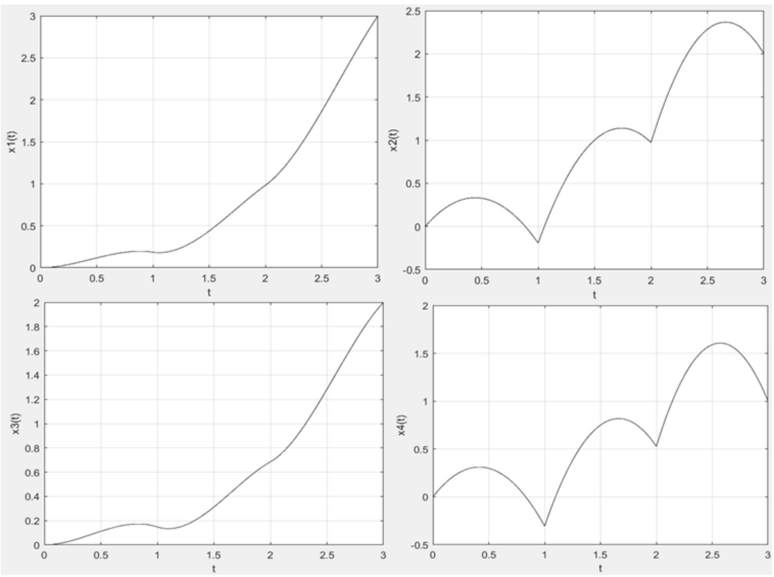
Пусть заданы некоторые фиксированные промежуточные моменты времени $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < T$ и $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, T = 3$. Начальные и конечные состояния фазового вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ выберем $x(0) = (0,0,0,0)^T$, $x(3) = (3,2,2,1)^T$.

Подставляя данные в формулы, которые были получены ранее, имеем явное выражения для $u = u(t)$:

$u_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{61}{18}t$, $u_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{65}{18}t$ при $t \in [0,1]$, $u_1(t) = \frac{17}{2} - \frac{44}{9}t$, $u_2(t) = \frac{17}{2} - \frac{46}{9}t$ при $t \in (1,2]$, $u_1(t) = 17 - \frac{115}{18}t$, $u_2(t) = 17 - \frac{119}{18}t$ при $t \in (2,3]$.

Если найденные выражения для управления подставить в (2) и проинтегрировать эти уравнения, получим движение объекта на каждом промежутке времени в следующем виде:

при $t \in [0,1]$: $x_1(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{61}{108}t^3, x_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{61}{36}t^2, x_3(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{65}{108}t^3, x_4(t) = \frac{3}{2}t - \frac{65}{36}t^2$; при $t \in (1,2]$: $x_1(t) = 3 - \frac{25}{4}t + \frac{17}{4}t^2 - \frac{22}{27}t^3, x_2(t) = \frac{25}{4} + \frac{17}{2}t - \frac{22}{9}t^2, x_3(t) = 3 - \frac{25}{4}t + \frac{17}{4}t^2 - - \frac{23}{27}t^3, x_4(t) = -\frac{25}{4} + \frac{17}{2}t - \frac{23}{9}t^2$; при $t \in (2,3]$: $x_1(t) = 16 - \frac{81}{4}t + \frac{17}{2}t^2 - \frac{115}{108}t^3, x_2(t) = -\frac{81}{4} + 17t - \frac{115}{36}t^2, x_3(t) = 16 - \frac{81}{4}t + + \frac{17}{2}t^2 - \frac{119}{108}t^3, x_4(t) = -\frac{81}{4} + 17t - \frac{119}{36}t^2$. Графический вид вектор-функции движения $x(t)$ представлен на рисунке 1.



Рисунке 1-Графический вид движения $x(t)$