Модели резонанса в линейных дифференциальных уравнениях второго порядка

С. А. Степанов, И. В. Захарова

Явление резонанса часто встречается в повседневной жизни, будь то игра на музыкальных инструментах или сложные явления в астрофизике. Многие из этих явлений моделируются и объясняются с помощью линейных дифференциальных уравнений, которые являются мощным аппаратом в решении задач о колебаниях. Рассмотрим одну из них – задачу о колебании груза, подвешенного на вертикальной пружине.

Если на груз действует внешняя сила, направленная вертикально, величина которой $f(t)$, то уравнение имеет вид (1) и называется уравнением вынужденных колебаний

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\mu\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t). \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициент μ характеризует сопротивление среды, ω – частоту собственных колебаний системы.

Перейдем к исследованию колебаний на конкретных примерах, применяя известные решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

<u>Свободные колебания</u>. Пусть отсутствует внешняя сила и сопротивление среды μ = 0, ω = 3 . Тогда задача о колебании груза будет иметь вид

y’’+9y = 0 (2)

y (0) = 5,y’(0) = 0 , (3)

а решение имеет вид

y = 5cos3t (4)

Согласно этой формуле груз совершает, как говорят, свободные гармонические колебания около положения равновесия.

<u>Вынужденные колебания</u> . Пусть теперь отсутствует сопротивление среды, но присутствует внешняя сила, т.е. $f(t) \neq 0$. Рассмотрим задачу

y’’+9y = 6sin3t, (5)

y (0) = 5, y’ (0) = 0 (6)

Это пример задачи с резонансом, т.к. корень характеристического уравнения совпадает с частотой внешней, действующей на систему силы.

Решение задачи (5), (6) имеет вид

$$y = 5cos3t + \frac{1}{3}sin3t - tcos3t, \qquad (7)$$

график которого представлен на рис.1:

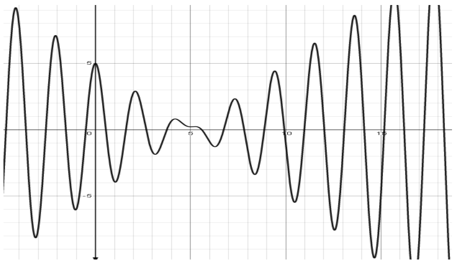

Рис. 1

Если в задаче (5), (6) положить $f(t) = 6\sin t$, то мы не получим резонанс, т.к. корень характеристического уравнения не будет совпадать с частотой силы, действующей на систему. Решение задачи в этом случае имеет вид

$y = 5cos3t - \frac{1}{4}sin3t + \frac{3}{4}sint,$ (8)

а график решения представлен на рис. 2 :

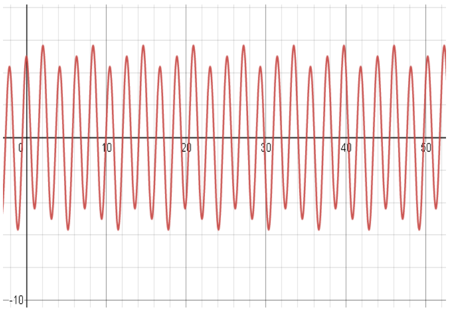

Рис.2

<u>Колебания в среде с сопротивлением.</u> Пусть теперь отсутствует внешняя сила, но имеет место сопротивление среды. Положим в уравнении (1) $\mu = \frac{1}{2}$, f(t) = 0 и рассмотрим задачу

y'' + y' + 9y = 0, (9)

y (0) = 5, y' (0) = 0 (10)

Решение задачи (9) (10) имеет вид

$$y = e^{\frac{-t}{2}}\left(5\cos\left(\frac{\sqrt{35}}{2}t\right)\right) + \frac{5}{\sqrt{35}}\sin\left(\frac{\sqrt{35}}{2}t\right)\Big) \quad (11)$$

График решения представлен на рис. 3 :

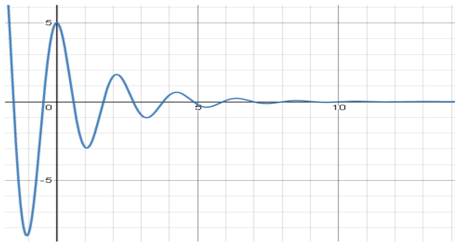

Рис. 3

В данном случае груз совершает свободные затухающие колебания около положения равновесия.

<u>Вынужденные колебания в среде с сопротивлением</u>. Положим в уравнении (1) $\mu = \frac{1}{2}$, f(t)=0 и рассмотрим задачу в случае отсутствия резонанса

$y'' + y' + 9y = 6\sin t$ (12)

$y(0) = 5,\ y'(0) = 0$ (13)

Решение задачи (12) (13) имеет вид

$$y = e^{\frac{-t}{2}}\left(\frac{331}{65}\cos\left(\frac{\sqrt{35}}{2}t\right) + \frac{47\sqrt{35}}{455}\sin\left(\frac{\sqrt{35}}{2}t\right)\right) - \frac{6}{65}cost + \frac{48}{65}sint\ , \quad (14)$$

а график решения представлен на рис.4:

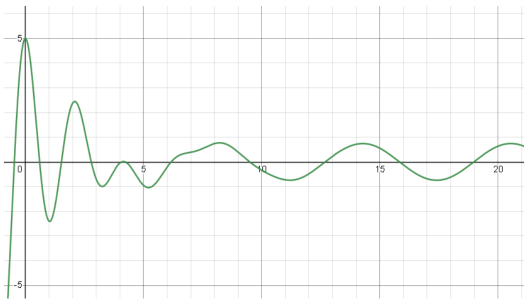

Рис. 4

В данном случае общее решение y — сложное колебательное движение, получающееся в результате сложения двух колебаний с разными частотами .

Рассмотрим пример задачи с резонансом. Для этого в уравнении (1) положим $\mu = 0{,}001$, а f(t)= 6sin3t

$y''+0{,}002y'+9y = 6\sin 3t$ (15)

$y(0) = 5,\ y'(0) = 0$ (16)

Решение задачи (15) (16) имеет вид

$$y = e^{-0,001t}(255cos3t + 0.075sin3t) - 250cos3t \;, \qquad (17)$$

график решения на рис.5:

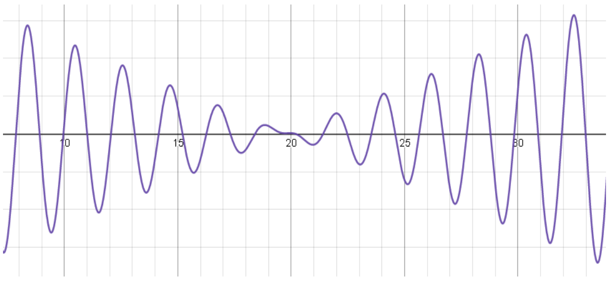

Рис. 5