

КОМБИНАТОРИКА НА СЛОВАХ

COMBINATORICS IN WORDS

*Карымов Матвей Ренатович, Митрофанов Климент Николаевич
Кузьмин Олег Викторович*

Ключевые слова: слово Фибоначчи, кривая Фибоначчи; фрактал слова Фибоначчи; морфизм; плотное слово Фибоначчи.

Слово Фибоначчи – это бинарное слово состоящие из $\{0,1\}$, которое определяется индуктивно по формуле:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 0, \quad f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Так же бесконечное слово Фибоначчи задаётся следующим пределом:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0100101001001 \dots$$

Помимо этого, существуют слова i – Фибоначчи, которые определяются индуктивно с помощью формулы:

$$f_0^{[i]} = 0, \quad f_1^{[i]} = 0^{i-1}1, \quad f_n^{[i]} = f_{n-1}^{[i]}f_{n-2}^{[i]}, \quad n \geq 2, \quad i \geq 1.$$

Для построения фрактала слова Фибоначчи воспользуемся определенным правилом, согласно которому каждый символ отвечает за конкретное действие. Такой способ представления называется «L-система». Правило выглядит следующим образом, если символ «1» - шаг вперед, если символ имеет чётную позицию в слове и равен «0» - шаг вперед и поворот налево, если символ имеет нечётную позицию и равен «0» - шаг вперед и поворот направо. После интерпретирования данного правила в виде программы, написанной на языке программирования «Python» получим следующую картинку (Рис. 1). Так же можно установить угол поворота, равный $\frac{\pi}{3}$, в таком случае получим кривую, похожую на кривую Коха (Рис. 2).

Определим плотное слово Фибоначчи путем применения к нему морфизма $\eta(00) = 0$, $\eta(01) = 1$, $\eta(10) = 2$, и опишем новое правило построения, где символ «0» - шаг вперед, символ «1» - шаг вперед и поворот направо и символ «2» - шаг

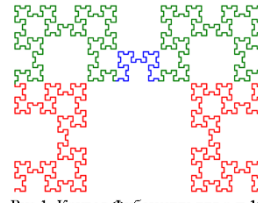


Рис. 1. Кривая Фибоначчи для $n = 19$

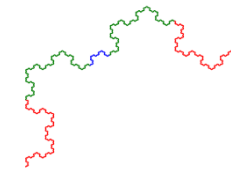


Рис. 2. Кривая Фибоначчи для $n = 19$ и угла 60

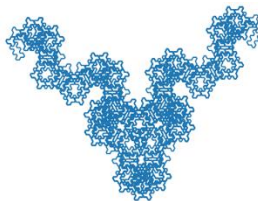


Рис. 3. Кривая Фибоначчи с морфизмом

вперед и поворот налево. После применим уже к плотному слову морфизм вида $\eta(0) = 01$, $\eta(1) = 2$, $\eta(2) = 10$, угол поворота $\frac{\pi}{3}$ (Рис. 3).

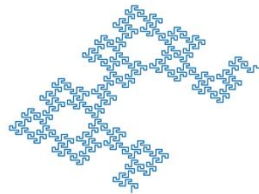


Рис.4. Кривая Фибоначчи с морфизмом

Для следующего морфизма: $\eta(0) = 21$, $\eta(1) = 02$, $\eta(2) = 10$, угол поворота 90 градусов (Рис. 4).

Помимо этого, мы можем применять различные морфизмы для слов i – Фибоначчи (Рис. 5).

Выводы: используя различные правила отображения и морфизмы, можно построить

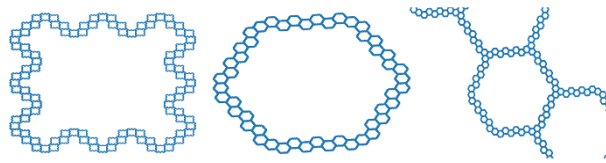


Рис.5. Примеры различных кривых

множество не повторяющихся между собой кривых слова Фибоначчи.