

**ES_U^* -предполные классы мультифункций
на 2-х элементном множестве**

ES_U^* -precomplete sets of multioperations on two-element set

Алексей Владимирович Демаков

Владимир Иннокентьевич Пантелеев

Ключевые слова: Мультифункция; предполные множества; суперпозиция; оператор замыкания; разветвление по предикату равенства

Пусть $E_2 = \{0,1\}$. Множество всех мультифункций на 2-х элементном множестве обозначается M_2 и определяется как:

$$M_{2,n} = \{f | f: E_2^n \rightarrow 2^{E_2}\}, M_2 = \bigcup_n M_{2,n}$$

Для множества $\{0,1\}$ введем обозначение « $-$ », для пустого множества — $*$. Если множество состоит из одного элемента, то его будем обозначать этим элементом.

Суперпозиция мультифункций $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ определяет некоторую мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} *, \text{ если } f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = * \text{ для некоторого } i \text{ или} \\ f(\beta_1, \dots, \beta_n) = * \text{ для некоторого} \\ \text{набора } (\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ где } \beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m). \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Такую суперпозицию будем называть S_U^* -суперпозиция.

Известно, что введение в рассмотрение только операции суперпозиции приводит к континууму замкнутых относительно суперпозиции множеств, поэтому вместе с суперпозицией также рассматривают другие операторы. Одним из таких является оператор разветвления по предикату равенства [1].

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из мультифункций f_1 и f_2 с помощью оператора разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), \text{ если } x_i = x_j. \\ f_2(x_1, \dots, x_n), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определим ES_U^* -замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2 , которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, S_U^* -суперпозиции и оператора разветвления по предикату равенства. Множество R называется предполным в M_2 , если ES_U^* -замыкание R отлично от M_2 , но ES_U^* -замыкание множества $R \cup \{f\}, f \notin R$ совпадает с множеством M_2 .

Пусть O_2^* множество функций, которые могут возвращать одно из значений $\{0,1,*\}$. H_2 множество функций, которые возвращают одно из значений $\{0,1,-\}$.

Определим следующие множества:

$$K_1 = O_2^*; K_2 = H_2; K_3 = \{f \mid f(0, \dots, 0) \neq 1\}; K_4 = \{f \mid f(1, \dots, 1) \neq 0\}.$$

$$K_5 = \{f \mid (f(\alpha_1, \dots, \alpha_m), f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m)) \notin \{(0,0), (1,1)\}\};$$

$$K_6 = \{f \mid * \in f(0, \dots, 0) \cup f(1, \dots, 1)$$

$$\text{или } (f(0, \dots, 0), f(1, \dots, 1)) \in \{(-, -), (0, -), (-, 1), (0, 1)\}\};$$

Теорема. Классы $K_1 - K_6$ являются ES_U^* -замкнутыми, ES_U^* -предполными и попарно различными.

В таблице ниже на пересечении i строки и j столбца указана функция, которая принадлежит классу K_i и не принадлежит классу K_j .

| | K_1 | K_2 | K_3 | K_4 | K_5 | K_6 |
|-------|-------|-------|-----------|-----------|--------|-----------|
| K_1 | | * | 1 | 0 | 0 | 0 |
| K_2 | — | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| K_3 | — | * | | 0 | 0 | 0 |
| K_4 | — | * | 1 | | 1 | 1 |
| K_5 | — | * | \bar{x} | \bar{x} | | \bar{x} |
| K_6 | — | * | (1*) | (*0) | (*000) | |

Литература

1. Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций / С. С. Марченков // Дискрет. математика. – 2008. – Т. 20. – Вып. 6. – С. 80–88.

