МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТОЙЧИВОГО НЕЛИНЕЙНОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА И АВТОМАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЕГО ДВИЖЕНИЕМ
A MATHEMATICAL MODEL OF AN UNSTABLE NONLINEAR MECHANICAL OBJECT AND AN AUTOMATIC MOTION CONTROL SYSTEM

Махрова Дарья Евгеньевна
Кривель Сергей Михайлович

Ключевые слова: обратный маятник; нелинейная система; уравнения движения

Перевёрнутый маятник является классической задачей в динамике и теории управления и широко используется в качестве эталона для тестирования алгоритмов управления (ПИД-регуляторов, нейронных сетей, нечёткого управления и т. д.). Задача системы управления данным объектом состоит в удержании перевёрнутого маятника в вертикальном положении за счёт смещения его основания.

Целью настоящей работы является разработка математической модели системы автоматического управления положением перевёрнутого маятника.

Для достижения цели были решены следующие задачи:

1. определение уравнений движения перевернутого маятника с использованием различных методов решения;
2. моделирование поведения полученной системы с помощью Matlab Simulink.

Перевёрнутый маятник состоит из массы m на вершине стержня длины l, вращающегося на горизонтально подвижном основании. Основание ограничено линейным движением, и его перемещение зависит от сил, способствующих движению или препятствующих ему.

Уравнения движения перевёрнутых маятников зависят от того, какие ограничения положены на движение маятника. Перевернутые маятники могут иметь различную конфигурацию, что приводит к ряду уравнений движения, описывающих поведение маятника.

Уравнения движения данной механической системы могут быть получены с помощью уравнений Лагранжа. Кинетическая энергия T системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2,$$

где V_1 – скорость основания маятника, V_2 – скорость точечной массы . V_1 и V_2 могут быть выражены через x и φ с помощью записи скорости как первой производной положения основания x_1.

Тогда кинетическая энергия задаётся следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos\varphi + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$$

и уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = U,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 g l \sin\varphi.$$

Подстановка T в эти уравнения и их упрощение приводят к уравнениям, описывающим движение перевёрнутого маятника:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = U,$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos\varphi - g \sin\varphi = 0.$$

При получении уравнений движения системы с помощью второго закона Ньютона возникают затруднения при вычислении внутренних усилий, которые не являются заранее известными. Также, при использовании уравнений плоского движения затруднительно вычислить нормальную реакцию опоры, которая не является постоянной величиной.

Следует заметить, что полученные уравнения требуют самой серьезной адаптации к задачам автоматического управления с выделением, в первую очередь, управляемых параметров и управляющих факторов. Особая проблема - управление системой с помощью одного управляющего фактора U**.**