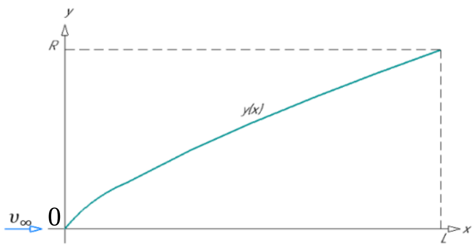
Аэродинамическая задача Ньютона/ Newton's aerodynamic problem

Намаконов Алексей Юрьевич

Ключевые слова: вариационное исчисление; аэродинамическая задача Ньютона; метод Ритца; уравнение Эйлера; усиленные условия Лежандра

Вариационное исчисление является одной из интересных и актуальных областей решения прикладных проблем. Целью данной работы является аналитическое и численное решение аэродинамической задачи Ньютона. Постановка задачи была дана Ньютоном в 1687 году в «Началах механики» для тела, движущегося с большой скоростью в разреженном газе. Задача пролежала 3 века, после чего оказалось, что она хорошо описывает движение тел в атмосфере планеты в гиперзвуковом диапазоне скоростей. И может использоваться при проектировании космических аппаратов и гиперзвуковых объектов военного назначения.



Поставим задачу – требуется найти оптимальную форму тонкого тела вращения *y(x)*, обладающую минимальным сопротивлением Ньютона D при гиперзвуковых скоростях движения в атмосфере:

$$D = \int_0^L y(x)\dot{y}^3(x)\ dx$$

и удовлетворяющую граничным условиям:

$$y(0) = 0,\ y(L) = R$$

(где L – длина тела, R – радиус донного сечения). Решение ищется в классе гладких функций:

$$y \in C_1[0; L]$$

Из решения уравнения Эйлера с учетом граничных условий получаем экстремаль:

$y = \frac{R}{L^{\frac{3}{4}}} x^{\frac{3}{4}}$

Полученная экстремаль удовлетворяет условию Лежандра и подозрительна на слабый локальный минимум целевому функционалу.

Получим численное решение аэродинамической задачи Ньютона по методу Ритца и сравним его с аналитическим решением задачи.

Решение вариационной задачи ищется в виде:

$y(n, x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$

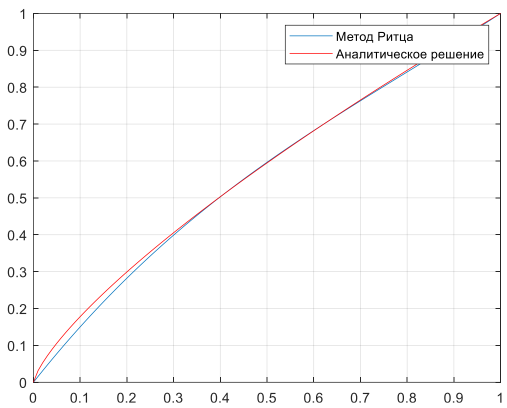
Будем считать, что длина тела L и радиус донного сечения R равны 1.

Зафиксируем число параметров $n = 2$, тогда получаем функцию вида:
$y(2, x) = x + a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2)$

Подставим полученную функцию в целевой функционал. Таким образом вариационная задача свелась к минимуму функции двух переменных a_1, a_2. Минимум функции находится стандартным образом: приравниваем к нулю частные производные и получаем систему уравнений.

Решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} a_1 = 0.1009 * 10^{-7} \\ a_2 = 0.0822 * 10^{-7} \end{cases}$$



Результаты аналитических и численных расчетов представлены на рисунке. Из рисунка следует, что в работе получено численное решение аэродинамической задачи Ньютона по методу Ритца, которое практически совпадает с ее аналитическим решением.