

**ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ,
ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, И СХЕМА ИХ РЕШЕНИЯ**

Лунина М. А.

Научный руководитель: Аргучинцев А. В.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, метод шагов, модель Лотки–Вольтерры, уравнение Хатчинсона, Python

Классические дифференциальные уравнения предполагают мгновенную реакцию системы на изменение входных данных. Однако в реальных биологических процессах (рост популяции, время взросления, пищевые цепи) всегда присутствует задержка. Математическое моделирование таких процессов требует использования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (ДУЗ). В работе рассматриваются простейшие модели динамики популяций, описываемые ДУЗ, и схема их решения.

Основное отличие ДУЗ от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) состоит в том, что производная в текущий момент времени зависит не только от настоящего значения функции, но и от её значений в прошлом. Для случая постоянного запаздывания τ задача Коши задается в виде (1)-(2).

$$x'(t) = f[t, x(t), x(t - \tau)], \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2)$$

Для решения задачи Коши (1)-(2) применяется метод шагов [1]. Временной интервал разбивается на отрезки длины τ . На первом шаге, аргумент с запаздыванием попадает в отрезок, где решение известно из начальной функции (2). Подставляя его, получаем ОДУ, которое решается стандартными методами. На втором шаге, аргумент с запаздыванием попадает в интервал найденного решения, и процесс повторяется. Таким образом, задача с запаздыванием сводится к последовательности ОДУ.

В работе рассмотрены две классические модели.

Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие популяций хищников и жертв [2, с. 115]. При отсутствии запаздывания система нейтрально устойчива: траектории в фазовой плоскости представляют собой замкнутые кривые. Введение запаздывания меньше критического

значения сводит кривые к состоянию равновесия, а при его превышении приводит к появлению предельного цикла.

Вторая модель – уравнение Хатчинсона, которое характеризует динамику популяции одного вида в условиях ограниченной среды обитания. Запаздывание играет роль времени взросления, и делает эту модель применимой для млекопитающих [3, с. 345].

Для численного решения уравнения Хатчинсона разработан класс на Python с использованием библиотек `numpy`, `matplotlib` и `scipy`.

Метод `check` проверяет устойчивость модели, `de_hatch` вычисляет правую часть уравнения. Значение функции в прошлый момент времени находится интерполяцией по сохранённой истории. Метод `solve` реализует метод шагов. На каждом шаге вызывается решатель Рунге–Кутты из библиотеки SciPy. Ему передаётся функция правой части, интервал и начальное значение. Полученное решение добавляется к массиву, цикл повторяется. В конце метод возвращает массивы времени и численности.

Для создания экземпляров класса были заданы два значения запаздывания: $\tau = 0,8$ и $\tau = 2$, демонстрирующие разные сценарии поведения системы. По полученным массивам с помощью `matplotlib` построены два графика зависимости численности популяции от времени, которые наглядно показывают переход от устойчивого равновесного состояния к автоколебаниям при превышении критического значения произведения коэффициента роста на величину запаздывания.

Таким образом, реализована программа на языке Python, которая позволяет получать и визуализировать численное решение уравнения Хатчинсона с различными параметрами. Полученные результаты соответствуют заявленным критическим значениям.

Список литературы

1. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [Электронный ресурс]. – URL: http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode_unicode/s-35/s-35.html (дата обращения: 28.04.2026).
2. Прасолов А. В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии : учебное пособие. – СПб. : Издательство «Лань», 2010. – 192 с.
3. Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журов А. И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: свойства, методы, решения и модели. – М. : ИПМех РАН, 2022. – 464 с.