

Метод целевого программирования в многокритериальных задачах

Нарочная К. С.

Научный руководитель: Аргучинцев А. В.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, целевое программирование, лексикографический подход, Парето-оптимальность.

В реальной практике часто возникает необходимость одновременно достичь нескольких противоречивых целей. Редко удаётся выполнить все критерии одновременно. Раздел теории, изучающий такие задачи, называется многокритериальной (векторной) оптимизацией.

Одним из подходов к решению многокритериальных задач является метод целевого программирования. В данной работе рассматривается лексикографический подход целевого программирования применительно к задаче об ассортименте продукции. Полученное решение проверяется на Парето-оптимальность.

Рассматривается векторная функция $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, которую требуется максимизировать на множестве допустимых решений $X \subset R^n: f(x) \rightarrow \max, x \in X$. Переход в пространство критериев позволяет ввести множество достижимости Y – все возможные значения вектор-функции $f(x)$.

Идеальная точка – максимум каждого критерия по отдельности обычно недостижима, поскольку разные критерии достигают своих максимумов в разных точках. В многокритериальных задачах отсутствует единое понятие оптимальности. Однако существуют подходы, позволяющие сузить множество возможных вариантов, отсеивая заведомо неоптимальные.

Одно из ключевых понятий – оптимальность по Парето. Оценка $y^* \in Y$ называется оптимальной по Парето, если не существует другой допустимой оценки $y \in Y$, которая была бы не хуже по всем критериям и строго лучше хотя бы по одному. Подробное изложение понятия Парето-оптимальности приведено в [1, с. 21-26].

Основная идея целевого программирования – поиск оценки, наиболее близкой к некоторому идеальному (утопическому) множеству в пространстве критериев. Лицо, принимающее решение (ЛПР), задаёт целевые уровни по каждому критерию и ищет не оптимальное в классическом смысле, а достаточно хорошее или достаточно близкое к оптимальному решение. Решением считается элемент $x^* \in X$, для которого вектор $f(x^*)$ находится на минимально возможном расстоянии от множества идеальных векторов U .

Архимедов подход основан на минимизации линейной свёртки. Коэффициенты a_i^- – положительные веса, характеризующие важность каждого критерия; их задаёт ЛПР. При использовании метода необходимо учитывать два требования: обезразмеривание (нельзя складывать величины разной размерности, например, людей и доллары) и масштабирование (слагаемые должны иметь одинаковый порядок).

В лексикографическом подходе цели ранжируются по важности: первый критерий имеет наивысший приоритет, второй – ниже, и так далее. Решаются последовательные задачи с одной целевой функцией, начиная с h_1 (наивысший приоритет) и заканчивая h_n (минимальный приоритет). Важное правило: решение задачи с более низким приоритетом не может ухудшить решения, полученные для более высокого приоритета.

Для иллюстрации рассмотрена задача об ассортименте продукции. При ограничениях $2x_1 + 3x_2 \leq 30$, $6x_1 + 4x_2 \leq 60$ и целевых ограничениях с отклонениями: $x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10$, $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 7$, $x_1 + d_3^- - d_3^+ = 8$ получено решение (4,5;7). Проверка подтверждает, что оно лежит на Парето-фронте.

Таким образом, показано, что лексикографический подход целевого программирования позволяет найти обоснованное решение, учитывающее приоритеты ЛПР. Проверка подтверждает, что полученное решение лежит на Парето-фронте и не может быть улучшено без нарушения более высоких приоритетов.

Список литературы

1. Методы принятия решений в многокритериальных задачах : учебное пособие / А. В. Аргучинцев, Н. Н. Шеломенцева. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2025. – 94 с.