# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ

**Щепетова А. О.**

**Научный руководитель: Антоник В. Г.**

**Ключевые слова:** аппроксимация, интерполяция, метод наименьших квадратов, линейные системы, QR-разложение

Машинное обучение занимается поиском закономерностей в обрабатываемых данных, что тесно связано с методами решения задач аппроксимации функции. Рассматривается задача приближения функции $f(x)$, заданной в виде таблицы $\{x_i,\ f(x_i),\ i = \overline{0,n}\}$ на отрезке $[a, b]$, с помощью функции $g(x)$, близкой к исходной $f(x)$ [1].

В работе функция $g(x)$ ищется в виде алгебраического многочлена заданной степени $m$. Такой выбор обусловлен тем, что многочлен является линейной функцией относительно своих коэффициентов, что позволяет свести задачу к решению линейной системы уравнений.

Рассмотрены основные постановки задачи аппроксимации.

Первая это задача интерполирования, при которой степень многочлена равна n, а значения функции $g(x)$ в точках $x_i$ совпадают с заданными значениями $f(x_i)$. В этом случае возникает невырожденная линейная система, которая может быть решена любым известным точным методом, например методом Гаусса. При использовании специальной формы записи интерполяционного многочлена система приобретает треугольный вид. В таком виде коэффициенты находятся методом последовательной подстановки.

Вторая постановка связана с методом наименьших квадратов, когда степень многочлена меньше $n$. Коэффициенты определяются из условия минимизации суммы квадратов отклонений. В результате получается нормальная система линейных уравнений, матрица которой является симметричной и положительно определённой.

Третья постановка – построение интерполяционного сплайна. Функция задаётся кусочно-линейно на каждом промежутке между узлами. Коэффициенты определяются из условий интерполирования и непрерывности. В результате, несмотря на количество уравнений в системе равное $2n$, матрица её коэффициентов имеет блочную структуру и решается достаточно просто.

Более подробно рассмотрено решение нормальной системы. Описывается метод основанный на QR-разложении матрицы коэффициентов на произведение ортогональной и верхней треугольной матриц. Это позволяет повысить численную устойчивость вычислений и эффективно находить коэффициенты аппроксимирующего многочлена.

Для иллюстрации рассмотрен пример, включающий все перечисленные постановки: построение интерполяционного многочлена, решение треугольной системы, применение метода наименьших квадратов с использованием QR-разложения, а также построение линейного сплайна. Приведены графики для сравнения полученных аппроксимирующих функций.

Таким образом, показано, что различные постановки задачи аппроксимации приводят к линейным системам разного типа, для которых применимы соответствующие методы решения. Отдельно выделен метод ортогонализации как численно устойчивому методу решения нормальных систем.

**Список литературы**

1. Срочко В. А. Численные методы. Курс лекций : Учебное пособие. – СПб. : Издательство «Лань», 2010. – 208с.